Ph. 2723.

Joseph [illegible]

[illegible]

Mathematisches Lehrbuch

zum

Gebrauche

der

churfürstlichen

Lyceen.

I Theil.

[illegible]

München [illegible]

[illegible]

Math Un 193
-1

Mathesis. Systemata & methodi
141.

R

Joseph Tanzers

der Weltweisheit Doktors, churfürstlichen geistlichen Raths, der sämmtlichen Lyceen und Gymnasien in Baiern und der obern Pfalz Vicedirektors, ordentlichen Lehrers der Physik und Mathematik in München

mathematisches Lehrbuch

zum

Gebrauche

der

churfürstlichen

Lyceen.

I Theil.

Mit Begnehmigung des churfürstl. Büchercensurkollegiums.

München 1780.

Gedruckt bey Johann Paul Vötter, churpfalzbaierischen Hof- Akademie- und Landschaftsbuchdrucker am Färbergraben.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Durchleuchtigsten Fürsten

und

Herrn Herrn

Karl Theodor

Pfalzgrafen

bey

Rhein,

Herzog

in

Ob-und Niederbaiern

des

H. R. Reichs

Erztruchseß

und

Churfürsten,

zu

Jülich, Cleve und Bergen

Herzog ꝛc. ꝛc.

Durchleuchtigster Churfürst,
gnädigster Herr Herr!

Niemal sind Reiche und Länder glücklicher, als wenn sie Philosophen zu Regenten haben, und wenn Selbst Regenten die allgemein- und bürgerlichnützlichen Wissenschaften nicht nur zu unterstützen, sondern auch mit großen Kosten und Aufwande unter ihren Unterthanen allenthalben zu verbreiten suchen.

Wer in meiner unterthänigsten Zueignungsschrift auch nur diese zwo Zeilen liest,

der liest zugleich den Innbegriff einer Lebensgeschichte, die Eure Churfürstliche Durchleucht bis in die späteste Nachwelt verewigen, und unsterblich machen wird. Er liest, und sieht zugleich das liebenswürdigste Bild eines Landesherrn, welcher (dieß ist die Herzensstimme aller Patrioten) der allgemeine Vater seiner Landeskinder, so wie Er's aller Künste und Wissenschaften ist.

Auf-

Aufgemuntert durch die gnädigste Willensmeynung, Kraft welcher jeder getreue Unterthan nach seinem Standesberufe zur allgemeinen Wohlfahrt (diese ist das Ziel der Wünsche und Befehle Eurer Churfürstlichen Durchleucht) das Seinige beytragen soll. — Dankbar für die Höchste Gnade, wodurch ich bereits in die sechs Jahre theils die physikalischen, theils mathematischen Wissenschaften mit möglichster Beflissenheit für das wahre Nützliche der

mir

mir gnädigst anvertrauten Studirenden zu lehren mich bemühe, wage ich's **Eurer Churfürstlichen Durchleucht** die Früchte meiner Bemühungen unterthänigst zu Füssen zu legen, — Früchte, die nicht nur auf diesen wenigen Blättern abgedruckt, sondern auch (Alle, die bey der öffentlichen Prüfung gegenwärtig sind, können Zeuge seyn) von meinen philosophischen Zuhörern begriffen, und in die Uebung gebracht worden sind.

Un=

Unsere Feinde und Gegner — die Antipoden der Mathematik, die es auch insgemein aller gemein- und bürgerlichnützlichen Wissenschaften sind, — mögen aus Neide, Mißgunst, Vorurtheile oder Nebenabsichten wider unsere dermalige Lehrart ausstreuen, was sie wollen, wir werden unter der gnädigst zugesicherten Unterstützung mit unermüdetem Eifer fortfahren, und uns der Höchsten Hulden und Gnaden nur desto würdiger zu machen suchen.

Der

Der gütige Himmel erhalte Eure Chur-fürstliche Durchleucht in die spätesten Jahre Höchst Ihrer gesegnetesten Regie-rung!

Ich bin in tiefester Ehrfurcht

Eurer Churfürstlichen Durchleucht

Unterthänigst gehorsamster
Joseph Tanzer.

Vorrede.

Wenn es überhaupt wahr ist, daß man jedes Werk des Genies, um davon ein billiges Urtheil zu fällen, aus dem Gesichtspunkte betrachten müsse, in welchem der Verfasser stund: so läßt sich dieses gewiß vorzüglich bey einem Lehrbuche behaupten, und in diesem Betrachte allein halte ich es für nöthig, die Veranlassung, den Zweck und Plan des gegenwärtigen vorauszuschicken, ohne deßwegen zu besorgen, daß ich für einen Selbstschutzredner angesehen werde.

Die Mathematik ist, wenigst in meinen Augen, eine Wissenschaft für alle, auch für denienigen, der

eben

eben keinen sonderlichen Hang oder Beruf in sich fühlt, in diesem Fache sich auszuzeichnen, wenn anders Anstrengung und Schärfe des Verstandes und der Beurtheilungskraft, System und Ordnung in der Denkungsart Jedermanns Sache ist. Denn sie ist gleichsam, wenn ich mich so ausdrücken darf, die ausübende Logik, welche ihren Schüler Schritt vor Schritt von einer Wahrheit zur andern fortführt, und ihn mit einem tiefdurchdringenden Blicke die Verhältnisse der Dinge aufzusuchen, und im schönsten Zusammenhange und Ordnung zu übersehen lehrt, und dieß mit einer Gründlich- und Genauigkeit, welche durch anhaltende Uebung und das Vergnügen überall auf den Grund der Sache einzusehen, ihm endlich so zur Natur wird, daß er sie auch bey allen seinen künftigen Berufsgeschäften überall aufsuchen wird. Auf diese Art wird oder kann doch die Mathematik nicht nur dem Naturkündiger und mechanischen Künstler, sondern auch dem Dichter, dem Redner, dem Juristen und Theologen die unläugbarsten Vortheile schaffen.

Es giebt freylich Leute, welche die Mathematik als ein rauhes, unfruchtbares Felsengebirg ansehen, wovon alles Vergnügen und Menschengefühl weggescheut ist; aber diese müssen entweder zu muthlos, oder zu schwindlicht seyn, diese Gegenden näher zu besuchen, und die Hügel hinanzusteigen, wo sanf-

tere

tere Luft weht, und sich hellere Aussicht zeigt. Wahr ist's, so lange der Mathematiker die Spuren der verborgenen Wahrheit verfolget, stößt er, besonders am Anfange bey jedem Schritte auf Hindernisse: findet überall Schwierigkeiten, bis er des Gangs gewohnt ist: wenn er aber am Ende zurücksieht, und seinen gemachten Weg, der aus lauter Uebergängen von einer evidenten Wahrheit zur andern besteht, mit einem Blicke überschaut, so fliessen auf einmal alle einzelne Wahrheiten in ein einziges Ganzes zusammen, das sich eben so sehr durch sein Mannigfaltiges, als durch die schönste Ordnung seiner Theile ausnimmt, und dessen Anschauen ihn mit dem vollkommensten Vergnügen segnet. Die Natur der Seele ist einmal so beschaffen, daß ihr Vergnügen in dem Anschauen der Wahrheit desto völler, mächtiger und lebhafter wird, je gründlicher, zusammenhängender, deutlicher und ausgebreiteter ihre Einsichten werden. (*)

Wenn aber die Mathematik das leisten soll, so darf man nicht bloß für die Physik das Nöthigste aus derselben ausheben, ihren Schwierigkeiten ausweichen, und Sätze, wie Kästner sagt, (**) für bewiesen annehmen, für welche nur unzulängliche, und zum Theile gar unrichtige Schlüße vorgebracht sind; sondern sie muß ganz gründlich, und in ihrer völligen Schärfe gelehrt werden. Bey

(*) S. Mendelsohns Briefe über die Empfindung.

(**) In der Vorrede zur Analysis endlicher Größen.

Bey der sechsjährigen Erfahrung meines Lehramtes wurde mir die besondere Anlage und Fähigkeit meiner Zuhörer auch zu höhern Wissenschaften bekannt genug. Nicht nur dieser oder jener gute Kopf, sondern beynahe der größte Theil war es, der die Differential- und Integralrechnung mit eben so vielem Eifer als Fertig- und Genauigkeit begriff — ausübte — bewies. Selbst die jungen Zöglinge der Herzoglich-Mariannischen Landakademie gaben erst im verflossenen Jahre unter Anleitung des Herrn Professor Grünbergers hievon ganz ausserordentliche Beweise zur größten Zufriedenheit Höchst ihrer Durchleuchtigsten Beschützerinn, und zur Verwunderung aller, die bey der öffentlichen Prüfung gegenwärtig waren. In den gymnasischen Schulen werden bereits dem gnädigst verordneten Plane gemäß die hinlänglichen Vorbereitungen vorausgeschickt: Warum soll man also nicht im Lyceo auch in das Innere dieser Wissenschaft dringen, um von ihr allen denjenigen Nutzen zu ziehen, den sie leisten kann?

Freylich giebt es manchen Philosophen, der die Rechnung vom Unendlichen weiter überhaupt nicht mehr als für einzelne Köpfe nöthig, so wie ohngefähr nur die Poesie für einzelne Köpfe nöthig seyn möchte; wer aber immer so denkt, der denkt es aus Nebenabsichten, oder weil er mehr für die Bequem-

lich-

lichkeit, als für die Arbeit und den Nutzen seiner Zuhörer sorget. Genug aber! die Erfahrung und der allgemeine Nutzen beweisen mehr, als was einzelne Männer sagen, die auch ihre guten Ursachen haben, warum sie es sagen. (*)

Die-

(*) Eben dieser erhabene Theil der Mathematik ist es, worinn sich die deutschen Gelehrten vor allen andern Nationen hervorgethan haben, wie ich in der Anmerkung des 165. §. zeige; Welche nun in 40 Jahren zu solcher Vollkommenheit gebracht wurde, daß Wolfens Lehrbuch seit dem fast die Assymtote der analytischen Einsichten der meisten deutschen Professorn der Mathematik geblieben ist, (*) ohne welche nach Eulers Ausspruch (**) nicht einmal die Mechanik, ich will nicht sagen, die übrigen Theile der angewandten Mathematik gründlich verstanden werden. In allen benachbarten Ländern, wo sich helleres Licht verbreitet, wird daher nicht nur von den übrigen, sondern auch von diesem Theile der Mathematik guter Unterricht gegeben: Sollen wir ihn unsern hoffnungsvollen Landesleuten entziehen? Nein! ich glaube wenigst meinem Vaterlande mehr schuldig zu seyn. Man höre hierüber die Herrn von Segner und Karsten reden. Jener (***) spricht: Praeparandus ad optimorum lectionem per inſtitutiones iuuenilis animus: id admodum inepte fit, ſi poſtquam principia tanquam diſtans aliquod lumen obſcure perſpexit, a doctore deſeratur.

Herr Hofrath Karsten (****) drückt sich also aus: Non tantum Algebrae communis praecepta, ſed et immortalis memoriae virorum Leibnitii et Neutoni inuenta, differentialium et integralium intelligo calculos ſcitu prorſus neceſſaria ſunt omnibus, qui analyſtarum huius ſaeculi prae caeteris eminentium ſcripta euol-

(*) Gelehrte göttingische Anzeigen auf das Jahr 1758. S. 138.
(**) Praef. Tom. I. Mechan.
(***) Praef. ad anal. fin.
(****) Praef. Matheſeos theor. elem. atque ſubl.

Diese Betrachtungen also, die ich bey so mancherley Versuchen und Beobachtungen bewährt gefunden habe, bewogen mich, mir für meinen mathematischen Unterricht einen eigenen Plan zu entwerfen, welcher nicht nur der Physik, wie Hißmann sagt, (*) sondern auch den übrigen höhern Wissenschaften Festigkeit und Dauer geben sollte: ich sah nämlich die Mathematik gleichsam als den Probierstein an, an welchem der junge Deutsche, da er nun eben von den schönen Wissenschaften herkömmt, wobey er manchmal aus Mißverstand an tändelnde Empfindeley anstatt männlicher deutscher Empfindung gewöhnt, und

---

euoluere, et practicarum huius scientiae partium *vel unius* solida cognitione imbui laudanda flagrant cupiditate. Auf der zweyten Seite aber sagt er: quo fere solo (calculo differentiali et integrali) scientiae physico-mathematicae ad tantum euectae sunt perfectionis fastigium, vt excelsis hisce coloribus pingatur Mathematicus.

- - - er übersteigt das Ziel erschaffner Geister,
findt die Natur im Werk, und scheint des Weltbaus Meister;
er wiegt die innre Kraft, die sich in Körpern regt,
den einen sinken macht, und den im Kreis bewegt.
Er schlägt die Tafeln auf von ewigen Gesetzen,
die die Natur gemacht, und nimmer wird verletzen.

(*) Die Mathematik ist der Lebenssaft, der, wenn er sich in den Kanälen der Physik herumbewegt, diesem Festigkeit und Dauer giebt. Hißmann in seiner Anleitung zur Kenntniß der auserlesenen Litteratur ꝛc. Wenn man nun auch nur das noch in etwas überdenkt, was ich §. 118., 119. und 120. von dem Einfluß der Proportionlehre auf die Physik ꝛc. angeführt habe, so wird man meine in der Anmerkung des §. 120 angebrachte Klage so ziemlich gegründet finden.

und so zu sagen, aus seiner Sphäre geführt wird, seine Geisteskräfte prüfen, durch anhaltende Uebung stärken, und durch Systeme und Ordnung bewähren sollte, um mit Muth und Zuversicht auf eignes Vermögen in die Tiefen anderer Wissenschaften einzudringen. Da ich aber bey meinem mathematischen Kurse in den engen Zeitraum von zehen Monathen, die noch dazu durch verschiedene Hindernisse unterbrochen werden, und wochentlich nur auf zwo sichere Stunden eingeschränkt bin, so fand ich aus so vielen in ihrer Art vortreflichen Lehrbüchern doch keines, das meinem Zwecke, unsrer Schulverfassung und Lokalumständen so ganz entsprochen hätte; da ich besonders meine Zuhörer sogleich in die Algebra führen konnte. Ich sah mich also genöthiget, meinen Unterricht schriftlich zu verfassen; und nachdem ich denselben bereits in die sechs Jahre geprüft, geläutert, ergänzt, geordnet und gebessert habe, so wage ich es nun endlich, um meinen Schülern Mühe und Zeitverlurst beym Nachschreiben zu ersparen, ihn auch öffentlich vorzulegen.

Der Grundgedanke meines ganzen Plans war, von den einfachesten Begriffen und Grundsätzen anzufangen, und dann mich nach und nach immer weiter auszubreiten: dieß, glaubte ich, sey selbst der Gang der Mathematik: So machte ich's daher bey der ganzen Arithmetik überhaupt, und bey einer

jeden Materie in's besondere, und in meinen Vorlesungen führte ich bey jeder Gelegenheit meine Zuhörer auf diese einfachen Grundsätze zurück.

Da die gemeine Arithmetik und Buchstabenrechnung schon in den untern Schulen vorausgeschickt werden, so ist jene ganz weggelassen, diese aber nur in so fern wiederholt worden, als es nöthig war, den mathematischen Grund davon anzugeben.

Ich gab zwar zu Zeiten von einem Satze einen eignen Beweis: führte aber zugleich, wenn etwa diesem die völlige Schärfe fehlen sollte, die Beweise größerer Männer an, so machte ich's §. 18. §. 154.

So sehr als ich die Weitläuftigkeit zu vermeiden suchte, so unterließ ich doch nicht jede Materie mit mehreren meistens brauchbaren Beyspielen zu erläutern, und allenthalben die Anwendung der Materie zu zeigen. Dieß beobachtete ich vorzüglich bey der Proportionlehre, wovon ich die Anwendung sowohl auf die gemeine Rechenkunst, als auch auf die Physik und übrige Mathematik machte. Ich erklärte bey dieser Gelegenheit nicht nur die reesische Regel: sondern gab auch §. 116. den Grund davon an, indem ich zeigte, daß sie nichts anders als eine Gleichung sey, woraus dann ihre Vortheile auf die natürlichste Weise folgen müssen.

Bey

Bey den Gleichungen selbst theilte ich die Aufgaben in gewisse Fächer ein, unter welche beynahe alle, die von einem Werth sind, gebracht werden können. Mehrere, die die nämliche Auflösung haben, machen ein Fach aus. Von jedem Fach wurde eine ordentlich aufgelöset, und dann noch etwelche zur Uebung nachgesetzt, um so den Anfängern den Weg zu weisen, wie sie jedes Problem, das ihnen aufgegeben wird, oder welches sie in einem Buche lesen, unter sein gehöriges Fach bringen, und darnach auflösen sollten.

Junge Leute werden zu sehr an Monotonie und Sektirerey gewöhnt, die auch auf andere Wissenschaften, und ihre ganze Denkungsart hinüberfließt, wenn man ihnen die Wahrheiten nicht unter verschiedenen Ausdrücken und Wendungen sehen läßt. Ich glaubte diesem Uebel dadurch abzuhelfen, daß ich sie auf andere Lehrbücher, und schier allemal anf solche hinwies, die ich ihren erworbenen Einsichten für angemessen hielt, und selbst benützt hatte: um den Gang und die Sprache mehrerer zu kennen, und daraus urtheilen zu lernen: wo ich aber von einer Hauptmaterie handelte, wurden ihnen auch die Hauptquellen gewiesen

Den Begriff des Unendlichen; die Bestimmung der Gränze; die Differential- und Integralrechnung habe ich beynahe ganz nach Herrn Hofrath Kästner

vorgetragen. Ich wollte meine Landesleute besonders bey einem so erhabenen Theile der Mathematik gleichsam bey der Hand hinführen, und ihnen den Mann zeigen, von dem Mathematiker lernen: zeigen seinen Gang, und wie sie ihn einst studiren sollten. Da ich aber doch für Anfänger schrieb, die noch nicht Geometrie genug hatten: so mußte ich mich bisweilen bey der Anwendung der Lehre z. B. in der Methode vom Kleinsten und Größten §. 160. in der Bestimmung der Quadratur ꝛc. indessen von ihm etwas entfernen, bis ich zu seiner Zeit wieder Gelegenheit haben werde, in die verlassne Pfade einzutretten. Es wird zwar in den mathematischen Lehrbüchern diese Rechnung des Unendlichen nach der Geometrie vorgetragen: Ich setze sie aber deßwegen noch in die Arithmetik, wohin sie mir ohnehin näher zu gehören scheint, weil mich die Erfahrung lehrte, daß sie hier eben so leicht begriffen wird, besonders wenn man die angehängte Kupfertafel zu Hilfe nimmt: und weil ich dadurch den Vortheil erhalte, sie die ganze Geometrie durch zu üben, und darinn stärker zu machen.

Die Geschichte, die immer ein nothwendiger Theil eines Lehrbuches ist, habe ich jeder Materie angehängt. Es wird bey dieser Gelegenheit auf der 177ten Seite Karamuels Meynung angeführt, welcher unsern Graf Herwart für den Erfinder der Logarithmen hält.

Die

Die Eintheilung und Ordnung der Sätze, wie der Innhalt zeigt, hat theils wieder meine eigene Erfahrung veranlaßt, welche mir dieselbe besonders vortheilhaft zeigte: theils erforderte es oft die Nothwendigkeit. So konnten die Brüche erst nach den allgemeinen Regeln der Gleichungen abgehandelt werden, weil ich viele Beweise durch Gleichungen mache: die Dezimalbrüche mußten der Würdenlehre folgen, weil ich sie als Würden verneinter Exponenten ansah u. d. g. m.

Ueberhaupt war mein ganzes Bestreben nach Ordnung und Zusammenhang, praktische Anwendung, Gründlich- und Deutlichkeit: in wie fern ich das geleistet habe, mögen billige Beurtheiler entscheiden; meine Hauptabsicht aber für unsre Schulen brauchbar, und meinen jungen Landsleuten nützlich zu werden. Bin ich so glücklich, unter diesen irgend ein Genie zu wecken, das Lust und Muth hat, (an Kräften fehlt es vielen nicht) sich in diesem Fache auszuzeichnen, und selbst aus den Quellen zu schöpfen, die ich überall getreulich angezeigt, so sind alle meine redlichen Wünsche erfüllt, alle meine Bemühungen belohnt.

Innhalt
des
I Theils.

Vorrede.

Erstes Hauptstück.

Von den ersten Gründen der Arithmetik, Buchstabenrechnung und Algebra.

I Abschnitt.

Allgemeine Begriffe und Grundsätze der Mathematik überhaupt, und der Arithmetik in's besondere. S. 1.

II Abschnitt.

Von der Buchstabenrechnung. S. 9.

III Abschnitt.

Von der Algebra und den allgemeinen Regeln der Gleichungen. S. 20.

IV Abschnitt.

Von den Brüchen. S. 42.

Zweytes Hauptstück.

Von den Würden und Wurzeln.

I

I Abschnitt.

Allgemeine Lehren der Würden und Wurzelgrößen. S. 56.

II Abschnitt.

Von den zehentheiligen Brüchen. S. 67.

III Abschnitt.

Von der zweyten und dritten Würde, und den hieher gehörigen Gleichungen in's besondere. S. 74.

IV Abschnitt.

Von dem binomischen Lehrsatze in Absicht auf die höhern Würden. Von den Versetzungen und Verbindungen. S. 99.

Drittes Hauptstück.

Von den Verhältnissen, Proportionen und Progreßionen.

I Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen. S. 109.

II Abschnitt.

Von den Progreßionen. S. 153.

III Abschnitt.

Von den Logarithmen. S. 162.

Viertes Hauptstück.

Von der Differential- und Integralrechnung.

I

I Abschnitt.

Vom Unendlichen. S. 179.

II Abschnitt.

Gründe der Differentialrechnung. S. 187.

III Abschnitt.

Gründe der Integralrechnung. S. 206.

Er=

Erstes Hauptstück.

Von den ersten Gründen der Arithmetik, Buchstabenrechnung und Algebra.

I. Abschnitt.

Allgemeine Begriffe und Grundsätze der Mathematik überhaupt, und der Arithmetik in's besondere.

§. 1.

Was sich immer vermehren oder vermindern läßt, heißt eine Größe (quantitas) Alle Zahlen, Linien, Körper, Kräfte, Zeiten, Geschwindigkeiten, Maase, Gewichte u. d. g. sind also Größen.

a) Man kann eine Größe blos als eine Menge von Theilen betrachten, nud dann nennen wir sie eine

unstettige Größe (quantitas discreta) oder man siehet auf die Verbindung der Theile unter einander, und dann heißt sie eine stettige Größe (quantitas continua.) Die Zahlen sind unstettige; Linien, Flächen, Körper aber stettige Größen.

b) Wenn eine Größe in etwelche kleinere zerfällt wird, so heißt man sie **Theile** derselben, und wenn einer von ihnen etlichmal genommen dem Ganzen gleich ist, **aliquote** (partes aliquotae) im widrigen Falle aber **aliquante Theile** (partes aliquantae). Von 12 ist 4 ein aliquoter, 5 ein aliquanter Theil.

§. 2.

Die **Mathematik** ist die Wissenschaft von den Größen überhaupt, und wird in die **Arithmetik** und **Geometrie** eingetheilt. Diese handelt von den stettigen, jene von den unstettigen Größen. §. 1. a.

a) Wenn die Mathematik die Größen von allen übrigen Eigenschaften der Dinge ganz abgesöndert betrachtet, so wird sie die **reine** (Mathesis pura seu abstracta) im Gegentheile aber die **angewandte** Mathematik (Mathesis applicata) genannt. Eine Länge von 20 Ruthen blos als Länge betrachtet, gehört in die reine Mathematik, als die Distanz zweyer Oerter, in die angewandte.

§. 3.

§. 3.

Die **Arithmetik** in etwas genauerem Verstande genommen, ist eine Wissenschaft, welche aus bekannten unstettigen Größen unbekannte findet. Sie heißt **gemeine Arithmetik** oder **Zahlenrechnung**, wenn sie blos mit Zahlen; **Buchstabenrechnung**, wenn sie mit Buchstaben; **Algebra**, wenn sie mit Gleichungen rechnet.

Anmerk. Euklides hat bereits schon vor 2000 Jahren die erste Theorie der Arithmetik geliefert, und in dem 7ten 8ten und 9ten Buche seiner Elemente so überzeugend vorgetragen, daß man darinn den großen Geist der Alten bewundern muß. Es schrieb zwar auch Nikomachus 300 Jahre vor Christi Geburt zwey Bücher, die aber nichts als Eintheilungen der Zahlen enthalten, und es hat wohl keiner von den Alten mit dem Euklides um die Arithmetik gleiche Verdienste gehabt. Nach Christi Geburt gab Frater Lukas de Burgo S. Sepulchri ein Minorit 1523 ein Werk in italienischer Sprache heraus, in welchem er den Algorithmus in ganzen und gebrochenen Zahlen, die Ausziehungen der Wurzeln ꝛc. abhandelt. Michael Stiefel ein Dorfprediger schrieb 1544 Arithm. integram; Andreas Tacquet Theor. et Prax. Arithm. worinn die Elementa Euclidis leichter erwiesen werden; und die Arithmetik fieng an eine andere Gestalt und glücklichere Schriftsteller zu bekommen. Von Samuel Morland einem Engelländer, Paskal einem Franzosen, dem berühmten Prof. zu Padua Johann Polenus, und besonders dem Freyherrn von Leibnitz wurden Rechnungsmaschinen u. a. erfunden. Wie weit sich endlich der Freyherr von Wolf um diese Wissenschaft verdient gemacht; zu welchem Grad der Vollkommenheit sie und die Mathematik überhaupt in unserm aufgeklärten Jahrhunderte die großen Männer Hr. Hausen; Hr. geheimer Rath von Segner; Hr. Euler; Hr. Lambert; Hr. Hofrath Kästner; Hr. Hofrath Karsten durch ihre vortreflichsten Werke

oder Lehrbücher gebracht haben, unter welchen auch Hr. Klems mathematisches Lehrbuch und la Caille vor andern zu empfehlen sind, darf wohl nicht mehr gesagt werden. Von der Geschichte der Arithm. und der Mathem. überhaupt sieh Klems math. Lehrbuch §. 5, Wolfs kurzen Unterricht von den mathematischen Schriften Kap. 1. Histoire de mathematiques par Mr. Montucla (4 Paris 1758. 2 Tom.) Heilbronners u. Weidlers Historie der Arithm. u. Astronom. u. endlich Stockhausens historische Anfangsgr. der Mathem. — Frobösen schrieb eine Bibliograph. mathem.

§. 4.

Eine **Gleichung** (aequatio) ist ein doppelter Ausdruck der nämlichen Größe mittels des Zeichen = z. B. $4 = \frac{8}{2}$ Man sagt dann: 4 gleich 8 mit 2 getheilt.

Anmerk. Da ich mich in der Folge durchgehends der Gleichungen bedienen werde, so ist es nothwendig, hier diese Erklärung vorauszuschicken.

§. 5.

Die übrigen in der Mathematik, und vorzüglich in der Buchstabenrechnung und Algebra üblichen Zeichen sind folgende:

Das Zeichen der Addition $+$
Der Subtraktion —
Der Multiplikation $\times$ oder $\cdot$
Der Division :
Der Gleichheit $=$
Der Ungleichheit $<$ $>$
Des Größeren $>$

Des

Des Kleineren <

Der Aehnlichkeit ∽

Des Unendlichen ∞

Des Unendlichkleinen $\frac{1}{\infty}$

Buchstaben werden bey der Multiplikation gleich ohne Zeichen zusammengesetzet. Z. B. Man schreibt a b statt a × b. Die Division wird auch bruchweise ausgedrückt, so daß der Divisor der Nenner des Bruches wird. Z. B. statt a : b setzet man $\frac{a}{b}$

§. 6.

Die für sich selbst evidenten Grundsätze, aus welchen die Mathematik ihre unläugbaren Beweise bis zum höchsten Grade der Gewißheit herholet, sind folgende:

1) Eine jede Größe ist sich selbst gleich $4 = 4$.

2) Das ganze ist allen seinen Theilen zusammengenommen gleich $4 = 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$.

3) Gleiches mit Gleichem wie immer vermehrt oder vermindert, giebt wieder Gleiches, d. i.

Weil $4 = 3 + 1$ so ist auch

+ 2	$4 + 2 = 3 + 1 + 2$
— 2	$4 - 2 = 3 + 1 - 2$
× 2	$4 \times 2 = 3 + 1 \times 2$
: 2	$4 : 2 = \frac{3 + 1}{2}$

4) Welche einem dritten gleich sind, sind unter sich selbst gleich.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Wenn } 2+3=5 \\ \text{und } \tfrac{8}{2}+1=5 \\ \text{so ist auch } 2+3=\tfrac{8}{2}+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Wenn } x=a \\ \text{und } y=a \\ \text{so ist } x=y \end{array}$$

5) Gleiches kann für Gleiches genommen, oder, wie man sagt; substituirt werden. Z. B.

$$\text{Wenn } x=\frac{y}{3}$$
$$\text{und } y=7-1$$
$$\text{so ist } x=\frac{7-1}{3}$$

§. 7.

Eben so untrüglich, wie die bisherigen Wahrheiten, sind folgende:

1) Das Ganze ist größer als ein oder nur etwelche Theile desselben.

$2+2 > 2$ und wechselweise
$2 < 2+2.$

2) Wird Ungleiches mit Gleichem, oder Gleiches mit Ungleichem wie immer vermehrt, oder vermindert, so entstehen wieder ungleiche.

Weil $2 < 3$
so ist auch $2 \times 2 < 3 \times 2$ u. d. g.

3) Was größer oder kleiner ist, als eine von zwoen gleichen Größen, das ist auch größer oder kleiner als die andre.

Weil

Weil $2 < 6$
und $6 = 3 + 3$
so ist auch $2 < 3 + 3$

§. 8.

Aus dem Begriffe der Größe fließen die vier Rechnungsarten der Arithmetik (quatuor Species) die **Addition**, **Subtraktion**, **Multiplikation** und **Division**. Durch die Addition und Multiplikation wird eine Größe vermehret; durch die Subtraktion und Division aber vermindert.

§. 9.

1) **Addiren** heißt eine Größe finden, die mehreren gegebenen gleich ist, oder mehrere Größen in eine sammeln. Daher man es auch am füglichsten **Zusammenzählen** nennet.

2) **Subtrahiren**, **Abziehen**, oder **Abzählen** heißt eine Größe von der andern einmal wegnehmen.

a) Wenn ich also eine von zwoen zusammenaddirten Größen von der Summe abziehe, so bekomme ich die andere. Weil $4 + 5 = 9$, so ist $9 - 5 = 4$: und wenn ich die abgezogene Zahl zum Rest addire, stellt sich die Zahl zurück, von der ich subtrahirt hatte. Weil $9 - 5 = 4$, so ist $4 + 5 = 9$. D. i. die untrügliche Probe der Addition ist die Subtraktion, der Subtraktion die Addition.

§. 10.

1) **Multipliziren** oder **Vervielfältigen** heißt eine Größe so oft nehmen, als es eine andere ausdrückt.

2) **Dividiren**, **Theilen** aber eine von der andern, so oft abziehen, als sie darinn enthalten ist, welches der **Antheil** (quotus) ausdrückt.

a) Es sind also diese zwo Rechnungsarten nichts, als Abkürzungen der vorigen.

b) Das Produkt des Divisors in den Quotienten, giebt das Dividendum. Weil $\frac{8}{2} = 4$ ist $2 \times 4 = 8$. Das Produkt mit einem Faktor getheilt, giebt den andern Faktor. Weil $5 \times 6 = 30$, so ist $\frac{30}{6} = 5$, und $\frac{30}{5} = 6$. D. i. die Division ist wieder die richtigste Probe der Multiplikation, diese die unfehlbare Probe der Division.

c) Das Produkt in der Multiplikation zwoer Größen z. B. 4 und 5 ist das nämliche, man mag 4 mit 5, oder 5 mit 4 multipliziren, diesen oder jenen Faktor voransetzen. Hr. Hofr. Karsten giebt von diesem einen Beweis in seinem Lehrbegr. der gesammten Mathem. 1 Th. §. 33.

§. 11.

1) Bey einer Multiplikation zwoer Größen ist allemal der eine Faktor so oft im Produkte enthalten, als die Einheit im andern Faktor. Es folget dieß aus

dem Begriffe der Multiplikation (§. 10) z. B. in $5 \times 4 = 20$ ist 1 in 4, wie 5 in 20 viermal: 1 in 5, wie 4 in 20 fünfmal enthalten.

2) Bey der Division steckt der Divisor so oft im Dividend, als die Einheit in dem Quotient. Z. B. In der Division $\frac{30}{5} = 6$, steckt 5 in 30, wie 1 in 6 sechsmal.

a) Man kann also eine jede Zahl als ein Produkt aus 1 und der Zahl selbst ansehen: z. B. $3 = 1 \times 3$ oder auch $3 = 3 \times 1$: denn gleichwie 3 im Produkte 3, also ist auch 1 in 1 einmal enthalten.

b) Weil aber 1 in 0 gar nicht enthalten ist, so ist auch $3 \times 0 = 0$, d. i.: wenn in einem Produkte aus zweenen, oder mehreren Faktorn einer 0 ist, so sind auch alle übrigen Faktorn, und selbst das Produkt $= 0$. $3 \times 4 \times 100 \times 0 = 0$.

II. Abschnitt.

Von der Buchstabenrechnung.

§. 12.

Die Buchstabenrechnung (calculus litteralis) rechnet durch algebraische Zeichen und Buchstaben, mit entgegengesetzten Größen.

a) Es werden also hier nicht nur die Größen, sondern auch die §. 5 angeführten Zeichen regelmäßig, und nach Beschaffenheit der Umstände verändert.

§. 13.

§. 13.

Entgegengesetzte Größen sind jene, die sich einander vermindern, d. i., ganz, oder zum Theil aufheben. Vermögen und Schulden, Vorwärts, und Zurückgehen, können für Beyspiele dienen. Man heißt eine die positive, oder beiahende (quantitas positiua) die andere die negative, oder verneinende Größe (quantitas negatiua) und drückt die erste mit + die zweyte mit — aus.

a) Beyde sind wirkliche Größen, und die positive ist mehr (quantitas nihilo maior) die negative in Beziehung auf jene weniger als nichts (quantitas nihilo minor) Nichts habe ich nur alsdann, wenn ich entweder keine von beyden Größen habe. Z. B. weder Vermögen noch Schulden, oder wenn ich von beyden gleichviel habe: aber in diesem Falle nur beziehungsweise.

b) Beyde vermindern einander: die positive wird nicht nur durch die negative, sondern auch die negative durch die positive, Schulden durch Vermögen, wie dieses durch jene vermindert. Es kann also auch Vermögen als eine negative, und Schulden, besonders, wenn sie das Vermögen übersteigen, als positive Größen angesehen werden. Daher wird eine jede Größe schon vermindert, wenn man nur ihr Zeichen umkehrt. Z. B. + a in — a und — a in + a.

c)

c) Da eine von der andern nur so viel aufheben kann, als sie beträgt, so ist $2\,b - 2\,b = 0$. $2\,x - x = x$. $2\,y - 5\,y = -3\,y$. d. i. wenn sie gleich sind, heben sie sich gleich auf: sind sie aber ungleich, so hebt die kleinere von der größern so viel auf, als sie beträgt, das übrige bleibt mit dem vorigen Zeichen zurück.

Anmerk. S. Hr. Hofr. Kästners Anfangsgr. der Arithm. und Geom. §. 9 n. 1 und Klems mathem. Lehrb. §. 129.

§. 14.

1) Eine Größe, die für sich selbst etwas Bestimmtes anzeigt, können wir eine Hauptgröße heißen. Z. B. a, x, y.

2) Welche aber anzeigt, wie oft die Hauptgröße genommen, oder zu sich addirt werden soll, einen Koeffizienten, z. B. in $2\,a$, $\frac{3}{4}\,x$, sind 2, und $\frac{3}{4}$, Koeffizienten, und zeigen an, daß a zweymal, x dreyviertelmal genommen, oder addirt werden soll.

3) Wenn aber eine Größe zeigt, wie oft eine andere durch die Multiplikation mit sich selbst genommen werden soll, so wird sie ein Exponent genennt, und rechter Hand neben der Größe gesetzt. Z. B. Bey a^2, 2^3, sind ^{2}, ^{3}, Exponenten, und es ist $a^2 = a \times a = aa$. $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

a) Die Koeffizienten sind also nichts anders, als Faktorn, keineswegs aber die Exponenten.

b)

b) Weil nach (§. 11 a) eine jede Zahl als ein Produkt aus 1, und der Zahl selbst angesehen werden kann, so ist auch $a = 1\,a = a^1$. $5\,x + x = 5\,x + 1\,x = 5\,x^1 + 1\,x^1$. D. i. eine buchstäbliche Größe, welche keinen Koeffizienten, oder Exponenten hat, hat eben deßwegen für ihren Koeffizienten und Exponenten 1.

c) Die Größe mit einem Exponenten heißt eine Dignität, oder Würde (Dignitas, potentia) $a^2 =$ ist die zweyte, 2^3 die dritte Würde u. s. w. Von diesen zwoen Würden heisset man auch die erste das Quadrat, oder Viereck (Quadratum) die zweyte den Würfl (Cubus) Der Exponent wird der Exponent der Würde (Exponens dignitatis vel potentiae) genennt, die er ausdrückt; die Größe aber, welche mit sich selbst multiplizirt die Würde giebt, die Wurzel. Es giebt so viele Wurzeln, als Würden; man zeigt sie daher mit $\sqrt{}$ an, und schreibt den Exponenten der Wurzel darauf, die man verlangt, wenn sie größer als 2 ist. So ist z. B. $\sqrt{a^2} = a\ \sqrt[3]{8} = 2$ u. s. w.

§. 15.

1) Gleichnamige Größen sind, die, welche gleiche, und auf gleiche Art beysammenstehende Buchstaben haben. $\frac{a\,b}{c}$, und $\frac{a\,b}{c}$ sind solche, nicht aber a, und a b, oder a b e, und $\frac{a\,b}{c}$ oder a b e, und $\frac{ab}{c}$. $2\,a$ u. a^2. a^2 und a^{-2}.

2)

2) Eine Größe ist einfach (Simplex. incomplexa) wenn sie nicht aus Theilen bestehet, die durch + oder — miteinander verbunden sind: bestehet sie aus solchen, so heißt sie zusammenmengesetzt (complexa) und zwar zweytheilig, dreytheilig, vieltheilig (binomia, trinomia, polynomia) ꝛc. nachdem sie aus zween, dreyen, oder mehrern Theilen bestehet. $a + bx$ ist zweytheilig $\frac{bx}{y} + ab - x$ dreytheilig.

§. 16.

Buchstäbliche Größen zu addiren dienet diese einzige Regel. Man zählet die gleichnamigen Größen nur zusammen, und läßt, was sich aufhebt, weg, die ungleichnamigen aber setzt man mit ihren vorigen Zeichen zusammen. Es sey

zu addiren	$3ab + c - 4d + x + z$
und	$ab - 4c + 4d - zx - y$
Summe	$4ab - 3c - zx + x - y + z.$

Der Grund dieser Regel ist: Addiren heißt mehrere Größen in Eine sammeln; es geschieht aber dieß, wenn man das, was zusammengehört, zusammenzählet, was sich aufhebt, wegläßt.

a) Mehrerer Bequemlichkeit halber sind die Größen nach der Ordnung des Alphabets zu setzen.

§. 17.

§. 17.

Buchstäbliche Größen zu subtrahiren, beobachtet man diese Regel. Man verändert in der zu subtrahirenden Größe die Zeichen, und addirt dann wie oben.

Es sey von $2\,ab + c - 3\,d + y$
zu subtr. $3\,ab - 3\,c + 2\,d - xy - z.$
Veränd der Z. $- \quad + \quad - \quad + \quad +$
Rest. $-ab + 4\,c - 5\,d + xy + y + z.$

Diese Regel folgt aus der obigen; denn wenn man die untern Größen $3\,ab - 3\,c$ rc. mit den obigen $2\,ab + c$ rc. ohne Veränderung der Zeichen zusammenzählte; so wäre es eine Addition: macht man also in den untern entgegengesetzte Zeichen, so muß auch das Entgegengesetzte, d. i. eine Subtraktion dieser von den obigen geschehen.

a) Wenn also $-a + -\frac{x}{2} - bx$ von $a^2 + x$ subtrahirt werden sollte, so würde $a^2 + x + a - \frac{x}{2} + bx = a^2 + \frac{x}{2} + a + bx$ herauskommen.

b) Es ist ein Unterschied zwischen $7 - 4 - 2$ und $7 - (4 - 2)$ denn es ist $7 - 4 - 2 = 1$, und $7 - (4 - 2) = 5$. Im ersten Falle sind -4 und -2 zwo besondere Größen, im 2ten machen sie eine zusammengesetzte (§. 15. 2) darum sie in ( )

( ) einzuschließen sind. Eben so ist $9 - 6 + 4 = 7$ aber $9 - (6 + 4) = - 1$.

§. 18.

Sind buchstäbliche, oder auch in Zahlen entgegengesetzte Größen mit einander zu multipliziren, so geben

1) ungleiche Zeichen der Faktorn im Produkte —.

2) Gleiche aber +.

$$\text{I.}\ + 6 \times - 3 = - 18$$
$$- 3 \times + 6 = - 18$$
$$\text{II.}\ + 6 \times + 3 = + 18$$
$$- 6 \times - 3 = + 18.$$

Bew. des I. oder daß $+ 6 \times - 3 = - 18$. Der Faktor $- 3$ drückt nicht nur aus, daß der andere Faktor $+ 6$ dreymal genommen werden soll: sondern, daß er dreymal vermindert, oder subtrahirt genommen werden müsse: es wird aber $+ 6$ dreymal vermindert, oder subtrahirt genommen, wenn sein Zeichen + in — verändert (§. 13 b u. 17) und also das Produkt negativ gemacht wird: so ist dann $+ 6 \times - 3 = - 18$. Im Gegentheile, wenn $- 3$ mit $+ 6$ zu multipliziren, so drückt der Faktor $+ 6$, oder sein Vermehrungszeichen aus, daß der andere $- 3$ sechsmal vermehrt, oder durch die Addition genommen werden soll: in diesem Falle darf aber das Zeichen von $- 3$ nicht verändert werden (§. 16) sonst würde ja $- 3$ sechsmal vermindert: so ist dann auch $- 3 \times + 6 = - 18$.

Der

Der Beweis des II, oder daß $-6 \times -3 = +18$ (denn das $+6 \times +3 = +18$ ist für sich selbst einleuchtend) ist der nämliche. Denn der Faktor -3 drückt hier wieder aus, daß der andere -6 dreymal soll vermindert oder subtrahirt genommen werden: es geschieht aber dieß nur alsdann, wenn sein Zeichen $-$ in $+$ verwandelt wird (§. 13 b. u. §. 17) so ist dann $-6 \times -3 = +18$.

a) Aus diesen folget nun, daß auch bey der Theilung ungleiche Zeichen des Divisors und Dividends im Antheil $-$, gleiche aber $+$ geben müssen. Und zwar ist $\frac{+6}{-3} = -2$, $\frac{-6}{+3} = -2$, weil im ersten Falle -3 in $+6$ vermindernd genommen wird, welches durch Veränderung des Zeichens vom Dividend, (nicht vom Divisor: denn dieß drückt nur aus, daß der Dividend vermindert werden soll) $+$ in $-$ verrichtet wird: im zweyten Falle aber vermehrend, welches das Zeichen $-$ unverändert läßt. $\frac{-6}{-3} = +2$, weil -3 in -6 wieder vermindernd genommen; folglich auch das Zeichen $-$ des Dividends bey dem Antheile in $+$ verwandelt werden muß.

Anmerk. Dieser Beweis scheint mir zwar aus den ersten Begriffen der entgegengesetzten Größen, der Multiplikation und Division u. a. hergeholt, und eben daher so überzeugend, als faßlich zu seyn: wem er es aber nicht scheint, der kann des Hr. Hofrath Kästners seinen wählen in den Anfangsgr. der Arithm. u. Geom. 102ten Lehrs.: oder in Klems mathem. Lehrb. §. 143. Hr. v. Segners Beweis kann hier nicht vorge-

getragen werden, weil die Lehre von den Proportionen noch mangelt. Man kann ihn in seinen Anfangsgr. der arithm. und geometr. Berechnungen §. 632 lesen.

§. 19.

Die Regel der Vervielfältigung mit Buchstaben, oder entgegengesetzten Größen ist also: die Buchstaben setzt man ohne Zeichen zusammen: (§. 5) gleiche Zeichen der Faktorn geben im Produkte +, ungleiche —; (vorhg. §.) Uebrigens folgt man der gemeinen Zahlenrechnung. Z. B.

Es sey zu vervielf.	$2a + bx - 3$
mit	$3a - 5$
so wird × 3 a	$6a^2 + 3abx - 9a$
× 5	$-10a - 5bx + 15$
das Produkt	$6a^2 - 19a + 3abx - 5bx + 15$

a) Man siehet wohl, daß hier an der Satzordnung eben nichts gelegen. Es kann die Vervielfältigung von der ersten oder letzten Größe, mit 3 a, oder mit — 5 angefangen werden, nachdem es bequemer ist: wenn nur alle Theile des Vervielfältigers in alle Theile der Vervielfältigungsgröße multiplizirt werden.

b) Die Vervielfältigung zusammengesetzter Größen anzuzeigen, schließt man sie nur in ( ) ein, oder drückt es durch eine darauf gemachte Linie aus. Z. B. $a \times (b + c)$ oder $a \times \overline{b + c}$. $(bx + d) . (cx - a)$.

c) Weil $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b).(a+b)$ so kann man nach Bedürfniß einen Ausdruck für den andern brauchen. Eben so wird $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ in diese zween Faktorn $(a-b).(a-b)$ aufgelöset.

d) Diese Zerfällung der Produkte in ihre Faktorn ist von größter Wichtigkeit; ich will daher einige Beyspiele zur Uebung hersetzen. I. $a^2 - b^2 = \overline{a+b}.\overline{a-b}$. II. $ax - xx = (a-x)x$. III. $x - xx = (1-x)x$. IV. $2x^2 + x = (2x+1)x$. V. $b^2x - b^3 = b^2(x-b)$. VI. $ax^2 + abx - aby - axy = (ab+ax).(x-y)$.

§. 20.

Die Regel der Theilung mit Buchstaben oder entgegengesetzten Größen endlich ist: Gleiche Buchstaben im Divisor und Dividend heben sich auf; ungleiche Zeichen geben wieder im Antheile —; gleiche aber +. Und übrigens folget man der gemeinen Zahlenrechnung. Z. B. Es sey $4abx - 2b$ zu theilen mit $2b$.

so ist Divis.	Dividend.	Quot.
$2b$	$4abx - 2b$	$2ax - 1$
	$4abx$	
	$-$	
	$0 \quad -2b$	
	$-2b$	
	$+$	
	0	

a) Multiplizirt man nun den Antheil $2ax - 1$ mit dem Theiler $2b$, so erhält man den Dividend $4abx - 2b$ wieder, und also wird die Probe der Division gemacht seyn.

b) Eben daher kömmt es, daß sich gleiche Buchstaben im Divisor und Dividend aufheben, ungleiche aber den Antheil geben; denn wenn ich eine aus zween Faktorn bestehende Größe z. B. ab mit einem Faktor z. B. b theile, so muß der andere oder a herauskommen (§. 10. b) b muß sich also oben und unten aufheben, und der ungleiche Buchstab a den Antheil geben. Doch ist dieß keine eigentliche Aufhebung, und von jener der Subtraktion oder entgegengesetzten Größen weit unterschieden: dort ist $b - b = 0$ hier $\frac{b}{b} = 1$, welche Einheit weggelassen werden darf, wenn b ein Faktor einer andern Größe war, weil sie nichts multiplizirt: denn es ist $\frac{bx}{b} = 1x = x$.

c) In den folgenden und andern ähnlichen Fällen darf man die gleichen Buchstaben des Divisors und Dividends nur ausstreichen. Z. B. $\frac{ax + ad - a}{a} = x + d - 1$. $\frac{b^2}{ab + 3b^3} = \frac{1}{a + 3b}$. $\frac{ax - cy}{xy} = \frac{ax}{xy} - \frac{cy}{xy} = \frac{a}{y} - \frac{c}{x}$. Von diesem Vortheile kann man auch in Ziffern Gebrauch machen, wenn der Divisor und Dividend beyderseits in gleiche Fak-

torn zerfällt, oder mit der nämlichen Zahl getheilt werden kann. z. B. $\frac{40 + 24}{8} = \frac{5 \times 8 + 3 \times 8}{8}$ $= 3 + 5 = 8$. $\frac{25\,x}{15\,a + 10\,b} = \frac{5 \times 5\,x}{5 \times 3\,a + 5 \times 2\,b}$ $= \frac{x}{3\,a + 2\,b}$.

d) Wird also eine Größe mit einer andern zugleich multiplizirt und dividirt, so bleibt die Größe unverändert: so ist $\frac{a \times b}{b} = a$. $\frac{10 \times 5}{5} = 10$: weil sich im ersten Falle b, im 2ten 5 oben und unten wegstreichen läßt.

III. Abschnitt.

Von der Algebra und den allgemeinen Regeln der Gleichungen.

§. 21.

Wenn die unbekannte Größe einer Gleichung der ersten Würde ist, so heißt man's eine einfache Gleichung, oder eine Gleichung vom ersten Grade: im widrigen Falle aber ist sie vom nämlichen Grade, von dem die höchste Würde der unbekannten Größe ist. $x + a = b$ ist eine Gleichung vom ersten; $x^3 + x^2 + 2\,x = c^4$ aber vom dritten Grade.

a) In allen Gleichungen werden die bekannten Größen mit den ersten, die unbekannten aber mit den letzten Buchstaben des Alphabets ausgedrückt. An-

Anmerk. Von der Algebra, welche einst Regel Koß hieß, im Deutschen aber auch Stellkunst genannt wird, findet man bis auf den Diophantes einen großen Mathematiker zu Alexandria im zweyten Jahrhunderte, keine Spuren. Dieser war der erste, welcher in seinen libris Arithm. eine Anweisung Gleichungen zu machen gab, die deßwegen ars diophantea betitelt wurde. Lucas de Burgo S. Sepulchri hieß sie zu erst Algebra, und schrieb davon in seiner Summa Arithm. et Geom. nachdem sie vorher Leon. de Pisa aus Arabien, wohin er aus Liebe zur Mathematik eine Reise gemacht hatte, nach Europa gebracht: doch kam er nicht weiter, als auf die quadratischen Gleichungen. Scipio Ferreus löste am ersten die kubischen auf. Im Jahre Christi 1559 fieng Johannes de Boteon, ein Antonitermönch, an, die unbekannten Größen mit Buchstaben zu bezeichnen: behielt aber den Ausdruck der bekannten durch Zahlen noch bey. Endlich erfand im Jahre 1590 Franz Vieta einer der größten französischen Mathematiker, die eigentliche Buchstabenrechnung, und bediente sich der großen Buchstaben, statt deren Harriot in Engelland die kleinen einführte, und die Buchstaben bey der Multiplikation ohne Zeichen zusammensetzte. Cartesius bezeichnete nach diesem die Würden mit Exponenten, und unternahm es, die Algebra auf die Geometrie anzuwenden. Und endlich stieg diese erhabene Wissenschaft unter Neuton, Leibnitz, den zweenen Bernoulli, und den schon §. 3 angerühmten Männern zu der Höhe und Vollkommenheit, die sie noch in keinem Weltalter erreicht hatte. S. Klemms mathem. Lehrb. §. 122 u. ff. deutsche Encyclopedie, die Frankf. bey den Worten Algebra und Analysis, wo auch ein Beyspiel von der Rechnung des Diophantes angeführt ist.

§. 22.

Es kann eine Gleichung kleiner ausgedrückt, oder abgekürzt werden, wenn man, was sich durch die Subtraktion und Division aufhebt, wegläßt, und was

torn zerfällt, oder mit der nämlichen Zahl getheilt werden kann. z. B. $\frac{40 + 24}{8} = \frac{5 \times 8 + 3 \times 8}{8}$ $= 3 + 5 = 8$. $\frac{25 x}{15 a + 10 b} = \frac{5 \times 5 x}{5 \times 3 a + 5 \times 2 b}$ $= \frac{x}{3 a + 2 b}$.

d) Wird also eine Größe mit einer andern zugleich multiplizirt und dividirt, so bleibt die Größe unverändert: so ist $\frac{a \times b}{b} = a$. $\frac{10 \times 5}{5} = 10$: weil sich im ersten Falle b, im 2ten 5 oben und unten wegstreichen läßt.

III. Abschnitt.

Von der Algebra und den allgemeinen Regeln der Gleichungen.

§. 21.

Wenn die unbekannte Größe einer Gleichung der ersten Würde ist, so heißt man's eine einfache Gleichung, oder eine Gleichung vom ersten Grade: im widrigen Falle aber ist sie vom nämlichen Grade, von dem die höchste Würde der unbekannten Größe ist. $x + a = b$ ist eine Gleichung vom ersten; $x^3 + x^2 + 2 x = c^4$ aber vom dritten Grade.

a) In allen Gleichungen werden die bekannten Größen mit den ersten, die unbekannten aber mit den letzten Buchstaben des Alphabets ausgedrückt. An-

Anmerk. Von der Algebra, welche einst Regel Koß hieß, im Deutschen aber auch Stellkunst genannt wird, findet man bis auf den Diophantes einen großen Mathematiker zu Alexandria im zweyten Jahrhunderte, keine Spuren. Dieser war der erste, welcher in seinen libris Arithm. eine Anweisung Gleichungen zu machen gab, die deßwegen ars diophantea betitelt wurde. Lucas de Burgo S. Sepulchri hieß sie zu erst Algebra, und schrieb davon in seiner Summa Arithm. et Geom. nachdem sie vorher Leon. de Pisa aus Arabien, wohin er aus Liebe zur Mathematik eine Reise gemacht hatte, nach Europa gebracht: doch kam er nicht weiter, als auf die quadratischen Gleichungen. Scipio Ferreus löste am ersten die kubischen auf. Im Jahre Christi 1559 fieng Johannes de Boteon, ein Antonitermönch, an, die unbekannten Größen mit Buchstaben zu bezeichnen: behielt aber den Ausdruck der bekannten durch Zahlen noch bey. Endlich erfand im Jahre 1590 Franz Vieta einer der größten französischen Mathematiker, die eigentliche Buchstabenrechnung, und bediente sich der großen Buchstaben, statt deren Harriot in Engelland die kleinen einführte, und die Buchstaben bey der Multiplikation ohne Zeichen zusammensetzte. Cartesius bezeichnete nach diesem die Würden mit Exponenten, und unternahm es, die Algebra auf die Geometrie anzuwenden. Und endlich stieg diese erhabene Wissenschaft unter Neuton, Leibnitz, den zweenen Bernoulli, und den schon §. 3 angerühmten Männern zu der Höhe und Vollkommenheit, die sie noch in keinem Weltalter erreicht hatte. S. Klemms mathem. Lehrb. §. 122 u. ff. deutsche Encyclopedie, die Frankf. bey den Worten Algebra und Analysis, wo auch ein Beyspiel von der Rechnung des Diophantes angeführt ist.

§. 22.

Es kann eine Gleichung kleiner ausgedrückt, oder abgekürzt werden, wenn man, was sich durch die Subtraktion und Division aufhebt, wegläßt, und was

sich durch die Addition oder Multiplikation zusammen setzen läßt, regelmäßig zusammen setzt.

Z. B. $$4\,a^2 + \frac{6\,a^2\,b}{3\,b} - 2\,a = 4\,x - 2\,x + \frac{2\,x}{2\,x}$$

giebt abgek. $$6\,a^2 - 2\,a = 2\,x + 1.$$

$$a\,a\,4\,a\,b\,3\,c = \frac{x^2\,4\,b\,5\,c}{2\,c}$$

ist abgek. $$12\,a^3\,b\,c = 10\,x^2\,b$$

§. 23.

Nach §. 6 bleibt die Gleichung unverändert, wenn die beyden Glieder derselben mit einer nämlichen Größe auf gleiche Art vermehrt, oder vermindert werden. Z. B.

beyderſ. $$x - \frac{3\,a}{b} = \frac{x}{b}$$

$+\,3\,a$ $$x = \frac{x}{b} + \frac{3\,a}{b}$$

$-\,\frac{x}{b}$ $$x - \frac{x}{b} = \frac{3\,a}{b}$$

$\times\ b$ $$b\,x - x = \frac{3\,a\,b}{b} = 3\,a$$

$:\ b - 1$ (§. 6. 3) $$x = \frac{3\,a}{b - 1}$$

Wenn überall nach der Vorschrift des vorherg. §. abgekürzt wird.

a) Man kann also auf diese Art bekannte Größen auf eine Seite so hinüberschaffen, daß endlich eine einzige unbekannte auf der andern ganz allein zu stehen komme, und dann ist die Gleichung aufgelößt. b)

b) Eben so kann eine jede Gleichung = o werden. In der obigen letzten Gleichung

$$x = \frac{3a}{b-1}$$

ist $$x - \frac{3a}{b-1} = o$$

c) Es ist nicht nothwendig die beyden Glieder der Gleichung allemal mit der nämlichen Größe zu vermehren, oder zu vermindern, weil sie sich auf einer Seite ohnehin aufheben: sondern es kann eine addirte Größe durch die Subtraktion; eine subtrahirte durch die Addition; eine multiplizirte durch die Division, und wechselweise, von einer Seite auf die andere übersetzt werden. Doch so, daß im letzten Falle alle Theile oder Größen der Gleichung, nicht nur die beyden Glieder derselben multiplizirt oder dividirt werden müßen. Man heißt diese kürzere Art zu verfahren die Uebersetzung, oder Transposition.

d) Auf diese Art schafft man die Brüche aus den Gleichungen weg, wenn einige da sind. Man sieht nämlich den Nenner eines jeden Bruchs als einen Divisor an; und multiplizirt mit demselben alle Theile der Gleichung, auch die Zähler der übrigen etwa vorhandenen Brüche, nur den eigenen ausgenommen. Um z. B. in der Gleichung $\frac{x}{b} + a = \frac{c}{d} - \frac{1}{b}$ den Bruch $\frac{x}{b}$ wegzuschaffen, multiplizirt man also mit b:

$$x + ab = \frac{bc}{d} - \frac{b}{b} \text{ oder } - 1$$

Denn

Denn wenn man nach der Lehre dieses §. die ganze Gleichung mit dem Nenner b multiplizirte, so würde $\frac{bx}{b} + ab = \frac{bc}{d} - \frac{b}{b}$ entstehen: nun hebt sich aber in $\frac{bx}{b}$ oben und unten b auf: folglich kann diese Multiplikation des Zählers sammt dem Nenner gleich weggelassen werden.

e) Die unter einander stehenden Glieder zwoer Gleichungen können ohne allem Nachtheile der Gleichheit addirt, subtrahirt, multiplizirt, oder dividirt werden: weil (da jede eine Gleichung ist) Gleiches mit Gleichem vermehrt oder vermindert wird. Es seyen die zwo Gleichungen

$$ax = 3b$$
$$2c = 4y$$

so ist I. $ax + 2c = 3b + 4y$

II. $ax - 2c = 3b - 4y$

III. $2acx = 12by$

IV. $\frac{ax}{ac} = \frac{3b}{4y}$

§. 24.

1) Eine algebraische Aufgabe auflösen, heißt, den Werth aller unbekannten Größen finden, welche die Aufgabe enthält.

2) Es kann daher eine Aufgabe aus einer oder mehreren unbekannten Größen bestehen, welche sich nicht füglich unter eine bringen lassen.

3) Eine Aufgabe aufzulösen, benennt man 1) die unbekannten Größen mit x, y, z; die bekannten aber mit a, b, c oder auch gleich mit Zahlen. 2) sucht man aus den Bedingnißen und Umständen eine Gleichung, indem man die nämliche Größe auf zweyerley Art ausdrückt; 3) reduzirt oder übersetzt man nach dem vorhergeh. §. die bekannten Größen auf eine, die unbekannten auf die andere Seite so zusammen, daß endlich eine einzige unbekannte auf einer Seite allein zu stehen komme.

a) Daher ist hier alles an der Benennung ersten Gleichung und Reduktion gelegen.

§. 25.

Die erste Gleichung mit ihrer gehörigen Benennung zu finden, kann etwa diese einzige Regel dienen: Man überdenke erstlich die ganze Aufgabe mit allen ihren Bedingnissen wohl, und spreche sie in seiner Muttersprache so deutlich aus, als es möglich ist: so wird sich bald eine Gleichheit zweyerley Ausdrücke zeigen. Dann benenne man vorzüglich das Unbekannte der Größen gehörig mit x rc. drücke die Aufgabe auch in algebraischer Sprache aus; schreibe immer einen Ausdruck auf die eine, den andern, welcher diesem gleich werden soll, auf die andere Seite des = (welches man gleich anfangs ansetzen kann) und fahre so lange fort, bis alle Bedingnissen der Aufgabe erfüllet sind. Auf diese Art wird sich endlich die ganze Gleichung herstellen. Z. B. Ein Vater, der 30 Jahre alt ist, habe einen Sohn von 8 Jahren. Wie alt muß der Sohn werden, um halb so alt als der Vater zu seyn? Wenn

Wenn die Aufgabe nur in etwas überdacht wird, so fragt sich um eine unbekannte Zahl der Jahre, die der Sohn zu seinen 8 Jahren noch hinzuleben muß, damit sein Alter dem halben Alter des Vaters gleich werde. Diese beyden Alter geben also die 2 Glieder der Gleichung. Nun mache man das Zeichen =; und nenne die unbekannte Zahl der Jahre, die der Sohn noch leben muß, x ꝛc.; so wird er alsdann, wenn er halb so alt ist, als sein Vater, 8 + x Jahre alt seyn. Dieß schreibe man auf die eine Seite. Der Vater, der die x Jahre auch noch fortlebt, wird 30 + x haben. Dieß schreibe man auf die andere Seite. Weil endlich das Alter des Sohns dem halben Alter des Vaters gleich ist, so ist 30 + x zu halbiren, und so wird die ganze Gleichung $8 + x = \frac{30 + x}{2}$

Die Beyspiele, welche ich in der Folge anführen werde, und eine fleißige Uebung, welche hier freylich vor Allen zu empfehlen ist, werden die Richtigkeit und allgemeine Anwendbarkeit dieser Regel vollends beweisen.

§. 26.

Bey der Reduktion der unbekannten Größen sind 1) vor allen die Brüche der unbekannten Größen, wenn einige da sind, auszumustern. 2) Bekannte Größen auf eine, und unbekannte auf die andere Seite zusammenzusetzen, und die Gleichung so sehr abzukürzen, als es möglich ist. 3) Darauf wohl Acht zu haben, daß die

un-

unbekannte Größe zu letzt positiv werde. 4) Eben darum meistens die kleinern unbekannten Größen zu den größern hinüberzubringen, wenn anders die größere der unbekannten nicht negativ ist: denn alsdann muß diese vor Allen positiv gemacht werden. Z. B. In

$$a - 5x = x + \frac{a}{b}$$

ist $-5x$ positiv zu machen, und

$$a - \frac{a}{b} = 6x$$ ꝛc. zu setzen.

§. 27.

Die Richtigkeit einer algebraischen Auflösung zu beweisen, darf man nur in der ersten Gleichung statt x ꝛc. den gefundenen Werth setzen: erfüllt nun jetzt diese Gleichung alle Bedingnissen der Aufgabe, (welches aus der Gleichheit der Glieder erhellet): so ist die Auflösung richtig, und der wahre Werth der unbekannten Größe gefunden. Z. B. Bey der Auflösung der §. 25 angeführten Aufg. zeigt sich, daß der Sohn noch 14 Jahre älter werden müße, um halb so alt, als sein Vater zu seyn. Setze ich nun in der Gleichung $8 + x = \frac{30 + x}{2}$ für x den gefundenen Werth 8: so ist die Probe gemacht; denn

$$8 + 14 = \frac{30 + 14}{2}$$

Aufgaben vom ersten Grade und mit einerley unbekannten Größen.

§. 28.

Erste Aufg. Zween Ringe sind um 50 Dukaten gekauft worden, wovon aber einer um 10 Dukaten theurer war, als der andere. Was kostete ein jeder?

Aufl. Der Werth des ersten, von dem mir gar nichts bekannt ist, sey x, so ist der Werth des 2ten x + 10. Beyde zusammen addirt geben 2 x + 10. Dieß muß 50 Dukaten gleich seyn: folglich ist die Gleichung

I. $2x + 10 = 50$

-10 $2x = 50 - 10 = 40$

$:2$ $x = \frac{40}{2} = 20.$

Der Werth des ersten war also $x = 20$, des zweyten $x + 10 = 30$ nach §. 27 in der I. Gleich: 20 für x gesetzt, giebt die Probe $2 \times 20 + 10 = 50$.

a) Allgemein wird diese Aufgabe so ausgedrückt: aus gegebener Summe a und Differenz b zwoer Größen die Größen selbst finden. Wenn die kleinere Größe $= x$, so ist die größere $= x + b$: also beyde zusammen $2x + b = a$. Durch die Uebersetzung wird endlich die kleinere $x = \frac{a - b}{2}$ oder gleich der halben Summe — der halben Differenz. Die größere muß daher der halben Summe + der halben Differenz gleich seyn; welches man findet, wenn man sie

bey

bey der Benennung = x und die kleinere x — b setzt: denn hernach ist 2 x — b = a. u. $x = \frac{a+b}{2} =$ der größern Quantität. Wir werden von dieser Aufgabe in der Trigonometrie Gebrauch machen.

§. 29.

Zweyte Aufgabe. Die drey Winkel eines Dreyeckes haben 180°. Der eine ist zweymal so groß als der andere, und hat 15° darüber; und der dritte macht mit dem ersten einen rechten Winkel aus. Wie groß ist ein jeder?

Aufl. Der erste Winkel ist ganz unbekannt, also = x. Der zweyte = 2 x + 15. Der dritte = 90 — x weil er erst mit x, 90° haben würde. Alle drey zusammen sind sie 180 gleich, also ist

I. $x + 2x + 15 + 90 - x = 180.$

Abgek. $2x + 105 = 180$

— 105 $2x = 180 - 105 = 75$

: 2 $x = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}$

Dieß ist der erste Winkel. Der zweyte ist $2x + 15 = (37\frac{1}{2}) \times 2 + 15 = 90.$

Der dritte $90 - x = 52\frac{1}{2}.$

In der I. Gleichung für x $37\frac{1}{2}$ gesetzt, giebt die Probe.

$$37\tfrac{1}{2} + (37\tfrac{1}{2}) \times 2 + 15 + 90 - 37\tfrac{1}{2} = 180.$$

§. 30.

§. 30.

Dritte Aufgabe. Vor zween Tagen ist ein Kurier nach Paris fortgegangen, der täglich 10 Meilen macht. Nun wird ein anderer nachgeschickt mit Befehle täglich 15 M. zu machen. Wann wird dieser den ersten einholen?

Aufl. Weil der erste vor zween Tagen fort ist, so hat er schon 10 Meilen $\times$ 2 voraus. Die Tage, in denen ihn der zweyte einholt, seyen $= x$.

Weil er diese x Täge 10 M. fortgehet, so macht er noch x mal $10 = 10x$ folglich in Allem $10 \times 2 + 10x$. Der zweyte macht x mal 15. Wenn dieser jenen erreicht hat, so haben beyde einen gleichen Weg gemacht. Folglich ist die Gleichung.

I.	$10 \times 2 + 10x = 15x$
$- 10x$	$20 = 15x - 10x = 5x$
$: 5$	$\frac{20}{5} = x = 4$

Der zweyte wird also den ersten in 4 Tagen einholen; denn in I. Gleichung statt x, 4 gesetzt, giebt $10 \times 2 + 10 \times 4 = 15 \times 4$.

a) Gesetzt der Kurier sey vor zween Tagen fort; und mache täglich die 10 Meilen. Wie viel hat der andere zu machen, wenn er ihn in 3 Tagen einholen soll? In der vorigen Aufgabe hat man die Zeit gesucht: jetzt ist der Raum zu finden, den der Kurier täglich ma-

machen soll, um den ersten zu erreichen. Dieser Raum sey x, so macht er in 3 Tagen 3 x. Der erste hat 10 × 2 voraus, und macht diese 3 Tage fort auch noch 10 × 3: also wird die Gleichung

$$3x = 10 \times 2 + 10 \times 3.$$ Antw. $16 \frac{2}{3}$ T.

b) Diese Aufgaben lassen sich auf alle gleichförmige Bewegungen anwenden. Z. B. Nun ist es genau 7 Uhr. Wann wird der Minutenzeiger den Stundenzeiger einholen? Er wird ihn in x Stunden einholen: und weil er in einer St. 60 Min. durchläuft, so sind diese Stunden x mit 60 zu multipliziren, d. i. in Minuten zu verändern: wovon er also 60x machen muß. Der Stundenzeiger hat schon 35 Min. voraus; denn er legt alle St. 5 Min. zurück: folglich macht er jetzt nur noch 5 x. Wenn jener diesen einholet, so haben sie gleichen Weg gemacht, also ist die Gleichung

$$60x = 35 + 5x.$$ Antw. in $\frac{7}{11}$ St.

Zween Körper bewegen sich mit ungleichen Geschwindigkeiten, so daß der zweyte 5 Schritte zurücklege, indessen der erste 3 durchläuft: doch hat dieser schon 40 Schritte voraus. Wann wird der zweyte den ersten erreichen? **Gleichung**.

$$5x = 3x + 40.$$ Antw. in 20.

Die Sonne macht täglich einen Grad von ihrer Laufbahne; der Mond 13°. Ist nun jetzt die Sonne im ersten Grade der Wage, der Mond aber nach 4 T. in dem ersten des Krebses. Wann wird sich die Koniunktion der Sonne und des Monds ereignen? Antw. wenn der

Mond

Mond 13 x (denn die Zeit x ist unbekannt) gemacht hat. Wie viel wird aber die Sonne alsdann Grade zurücke gelegt haben? Antw. x + 3 + 120, weil sie täglich nur einen Grad macht; 3° aber und 4 Zeichen, wovon jedes 30° hält, schon voraus hat. Folglich ist die Gleichung

$$13\,x = x + 3 + 120.$$ Antw. in $10\frac{1}{4}$ T.

c) Achilles habe eine hundertmal größere Geschwindigkeit als eine Schildkröte, und mache in einer Stunde eine ganze Meile Wegs, indeß die Schildkröte nur den hundersten Theil davon zurücke legt. Wann wird Achilles die Schildkröte einholen, falls sie eine ganze Meile voraus ist? Antw. Wenn er den Raum x gemacht hat. Weil aber die Schildkröte nur den hundersten Theil von x oder $\frac{x}{100}$ machen wird, und schon eine ganze Meile voraus hat: so ist die Gleichung

$$x = \frac{x}{100} + 1$$

Achilles wird die Schildkröte in einer St. und den 99 Theil einer St. erreichen, und zugleich eine Meile, und den 99 Theil einer Meile zurückelegen.

1 Anmerk. Dieß ist der bekannte Einwurf, womit einst Zeno die Möglichkeit der Bewegungen bestritten, und den man wegen der Stärke, die man darinn zu finden glaubte, Zenons Achilles genannt hat. Mahler löset ihn durch die Summirung einer unendlichen Reihe auf §. 201 Algeb. Ich werde es auch thun, obschon die hier angeführte Auflösung den Ungrund des Sophisma vollkommen beweiset.

2 Anmerk. Die in diesem §. enthaltenen Aufgaben werden sich wegen ihrem Nutzen und Anwendbarkeit in der Physik und Geometrie vorzüglich empfehlen.

§. 31.

§. 31.

4te Aufg. Einige Studenten legen zusammen, um eine kleine Lesebibliothek zu kaufen. Wenn einer einen Dukaten giebt, so bleiben 5 Fl. übrig; giebt aber einer einen Konventionsthaler, so gehen 60 Fl. ab. Wie viel sind Studenten? Was kostet die Bibliothek?

Aufl. Die Zahl der Studenten sey $= x$, so kostet im ersten Falle die Bibliothek $5x - 5$, im 2ten, 2 Fl. 24 Kr. oder $2\frac{2}{5}$ Fl. $\times x + 60$ Fl. Denn weil im ersten Falle das zusammengelegte Geld um 5 Fl. zu viel wäre, so ist dieß abzuziehen; im 2ten sind die 60 Fl. aus dem entgegengesetzten Grunde zu addiren. Der Werth der Bibliothek bleibt immer gleich: folglich entstehet die Gleichung

$$\text{I.} \qquad 5x - 5 = 2x + \frac{2x}{5} + 60$$

$$\times 5. \qquad 25x - 25 = 10x + 2x + 300$$

$$-12x. \qquad 13x - 25 = 300$$

$$+25. \qquad 13x = 325$$

$$: 13. \qquad x = \frac{325}{13} = 25.$$

Es sind also 25 Studenten. Die Bibliothek aber kostet 120 Fl.; denn nach der ersten Gleichung ist

$$5 \times 25 - 5 = 2 \times 25 + \frac{2 \times 25}{5} + 60.$$

Um nun zu finden, wie viel ein jeder wirklich geben muß, damit weder abgehe, noch übrig bleibe, darf nur der Werth der Bibliothek mit 25 getheilt werden.

a) Diese Art der Auflösung hat auch bey folgenden Aufgaben Statt. Eine Frau will 16 Ellen wollenen Zeug machen lassen, und da gehen ihr 2 Pf. ab. Sie läßt die Hälfte machen, und jetzt bleibt 1 Pf. übrig. Wie viel hat sie Wolle? Und wie hoch läuft das Pfund? Die Gleichung wird

$$\frac{x+2}{16} = \frac{x-1}{8}.$$ Antw. 4 ℔, deren eines 4 Ellen giebt.

b) Man soll eine Zahl suchen, welche, wenn ich ihr ihre Hälfte addire, so viel über 60 beträgt, als sie einzeln genommen, unter 65 ist. Was ist es für eine Zahl?

Gleichung. $x + \frac{x}{2} - 60 = 65 - x.$ **Antw.** 50.

§. 32.

Kommen mehrere unbekannte Größen in einer Aufgabe vor, welche sich nicht füglich unter eine bringen lassen, so benennet man 1) eine mit x, die andere mit y u. s. w. 2) Macht man so viele Gleichungen, als solche unbekannte Größen, x, y etc. in der Benennung vorkommen. 3) Sucht man für eine z. B. für x, oder wenn es nöthig ist, auch für mehrere, den Werth in Nebengleichungen, indem man sie nach §. 24. 3. allein auf eine Seite bringt. 4) D en o gefundenen

Werht

Werth von x oder y substituirt man in einer der ersten Gleichungen nach §. 6. 5; und endlich 5) sucht man nun y oder z wieder nach den §. 26 festgesetzten Regeln. Z. B. Man wollte die Aufgabe des §. 28. a. nach diesen Regeln auflösen; so wäre die größere Quantität = x die kleinere = y, die Summe = a, die Differenz = b zu machen. Und dann würden

Die Hauptgleichungen		Die Nebengleich.
I.	$x + y = a$	$x = a - y$
II.	$x - y = b$	

Wird jetzt die gefundene $a - y$ in der II. Gleichung für x gesetzt, so entsteht diese neue

$$a - 2y = b$$

Nun (§.26.3) $+ 2y$ $\quad a = b + 2y$

$- b$ $\quad a - b = 2y$

$: 2$ $\quad \frac{a-b}{2} = y$

Welches die kleinere Größe ist, so wie sie §. 28. a. gefunden worden. Wollte man die größere x finden, so müßte durch die Nebengleichung der Werth für y gefunden, und dieser eben so substituirt werden, wie es vorhin mit dem von x geschehen ist; dann würde $x = \frac{a+b}{2}$ wie §. 28. a. herauskommen.

a) Man kann auch zwo Nebengleichungen machen, indem man aus beyden Hauptgleichungen den Werth für x oder y bestimmet. Z. B.

Hauptgleich.		Nebengleich.
I. $x + y = a$		$x = a - y$
II. $x - y = b$		$x = b + y$

Wenn man nach dem 4ten Grundsatze §. 6. $a - y$ und $b + y$ mit einander vergleichet, so wird

$$a - y = b + y$$

$+ y$ $\qquad a = b + 2y$

$- b$ $\qquad a - b = 2y$

$: 2$ $\qquad \frac{a - b}{2} = y$

Was für eine von beyden Methoden vorzuziehen sey, giebt die Beschaffenheit der Aufgaben zu erkennen.

Aufgaben mit mehrerley unbekannten Größen.

§. 33.

1te Aufgabe. Ein Weinwirth hat zweyerley Weine, vom einen den Eimer um 20, von dem andern um 30 Fl. gekauft. Nun will er sie so vermischen, daß er 10 Eimer, jeden zu 24 Fl. bekomme. Wie viel muß er von jedem nehmen?

Aufl. Der erste sey x, der zweyte y: so müßen $x + y = 10$ Eimer werden. x kostet 20 Fl., y aber 30; die 10 sollen 24 gelten. Wenn ich also jeden mit seinem Werthe multiplizire, so wird $20x + 30y = 10 \times 24$. Folglich die

Glei-

Gleich.		Nebengleich.
I. $x + y = 10$		$x = 10 - y.$
II. $20x + 30y = 240.$		

Subst. $10 - y.$	$200 - 20y + 30y = 240$
$- 200$, u. abgek.	$10y = 40$
$: 10$	$y = \frac{40}{10} = 4$

Er muß also vom bessern 4, vom schlechtern 6 Eimer nehmen. Das letzte zeigt sich in der Nebengleichung: denn dort ist $x = 10 - 4 = 6$. Die Probe ist: weil in den beyden ersten Gleichungen statt $x = 4$, statt $y = 6$ gesetzt

I. $4 + 6 = 10$

II. $20 \times 4 + 30 \times 6 = 24 \times 10$ macht.

a) Ein Bierschenk hat den Eimer weißes Bier um 4 Fl. bezahlt. Nun möchte er gerne die Maaß um 4 Kr. geben, und doch bey der Maaß einen Kr. gewinnen. Wie viel darf er Wasser zuschütten? Er muß das Wasser für die Maaß um einen Kreuzer, das Bier aber um diesen Kr. theurer anrechnen. Dann werden die ersten zwo Gleichungen, den Eimer zu 60 M. angesetzt, und wenn das Bier x, das Wasser y heißt, also stehen:

I. $x + y = 60$

II. $5x + y = 60 \times 4$. Antw. 15 M.

Anmerk. So lassen sich alle Aufgaben der Vermischungs- und Alligationsregel (wovon an seinem Orte wird gehandelt werden) auflösen, die bey vielen Handelschaften vorzüglich aber beym Münzwesen, Silberarbeiten, Zinngießen, Kompositionen, u. a. so oft vorkommen. Folgende Aufgabe soll noch zu einem Beyspiele dienen.

b) Fünfzehenlöthiges und neunlöthiges Silber, sollen also vermischet werden, daß ein 13 löthiges herauskomme. Wie viel ist von jedem zu nehmen? Es sey das erste x, das zweyte y; so muß das erste $\frac{15}{16}$, das 2te $\frac{9}{16}$, einer Mark seyn; beyde zusammen werden $\frac{13}{16}$ (die M. zu 16 Lothe) ausmachen. Die durchaus gleichen Nenner können nach §. 20. d. weggelassen, und die Quantität 13 löthigen Silbers, die man verlangt, = 1 gesetzt werden. Dann sind die Gleichungen

$$x + y = 1$$

$$15x + 9y = 13.$$ Antw. Vom y, $\frac{2}{3}$; vom x, $\frac{1}{3}$.

Anmerk. In Münzstätten nimmt man gleich vom schlechtern 2, vom bessern 4 Theile, oder auch vom ersten 1, vom zweyten 2: weil theils die Eintheilung der Marke in Drittheile nicht gewöhnlich ist, theils die Vermischung nur im Großen geschiehet. Die Art, auf welche es die Münzverständigen suchen, ist folgende. Sie ziehen zuerst das Mittlere vom Bessern ab, die Differenz hier 15 — 13 = 2, giebt die Menge des Schlechtern: dann ziehen sie auch das Schlechtere vom Mittleren ab; diese Differenz 15 — 9 = 4, giebt die Menge des Besseren, welche in die Mischung kommen soll. S. Schlüters Unterricht von Hüttenwerken, besonders aber Johann Beckmanns Technologie 32 Abschn.

c) Es giebt noch eine Art Aufgaben, welche sich so, wie die bisherigen auflösen lassen. Z. B. Ein Vater hinterläßt seinen 11 Kindern, 3600 Fl. mit der Bedingniß, daß ein Sohn 360, eine Tochter 300 Fl. bekommen soll; bey der Theilung gieng das Vermögen auf. Wieviel waren Söhne, wieviel Töchter? Gleichungen.

I.

I. $x + y = 11$

II. $300x + 360y = 3600$. Antw. 6 T. 5 S.

Anmerk. Man kann die Auflösung auch mit einerley unbekannten Größen machen. Es sey die Zahl der Söhne $= x$, so ist die Zahl der Töchter $= 11 - x$. Beyde mit ihrem Erbtheile multiplizirt, geben $360x$, und $3300 - 300x$: und weil dieß zusammen der ganzen Erbschaft gleich ist, so entstehet die Gleichung

$$360x + 3300 - 300x = 3600.$$

welche reduzirt, die oben gefundenen 6 Töchter und 5 Söhne giebt.

Der Hr. Prof. Beckmann macht die obige Berechnung zur Beschickung des Tiegels im Münzwesen allgemein auf die letzte angeführte Methode. Er nennet den Gehalt des feinern Silbers a, des schlechtern b; den das Gemeng erhalten soll, c. Wird nun vom Feinern x genommen, so ist vom Geringern $1 - x$ zu nehmen. Jedes mit seinem Gehalte multiplizirt, giebt $ax + b(1 - x) = c$, und endlich $x = \frac{c - b}{a - b}$

§. 34.

2te Aufgabe. Für jede Aufgabe, die du mir auflösest, gebe ich dir einen 24er, sagte der Vater zu seinem Sohne, einem Kandidaten der Mathematik. Für jede aber, die du nicht auflösest, rechne ich dir wieder einen 12er ab. Nun hat er 30 Aufgaben gemacht, und einer ist dem andern nichts schuldig. Wie viel hat er davon aufgelöst, wie viel nicht?

Aufl. Die aufgelösten Aufgaben sind x, die unaufgelösten y, so ist nach den Bedingnißen, die Summe der aufgelösten und unaufgelösten $= x + y = 30$. Mit ihrem Werthe multiplizirt, und die wenigern von

den

den mehrern abgezogen, müßen sie sich aufheben, oder $24x - 12y = 0$ werden. Also ist

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & x + y = 30 \\ \text{II.} & 24x - 12y = 0 \\ \text{oder} + 12. & 24x = 12y \end{array}\right\} x = 30 - y$$

$$\begin{array}{ll} \text{Subst.} & 720 - 24y = 12y \\ + 24y & 720 = 36y \\ : 36 & \frac{720}{36} = y = 20. \end{array}$$

Welches die Zahl der unaufgelösten Aufgaben ist; die der aufgelösten ist nach der Nebengleichung $30 - 20 = 10$. Probe

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 10 + 20 = 30 \\ \text{II.} & 24 \times 10 - 12 \times 20 = 0 \end{array}$$

a) Hieher gehören auch diese und dergleichen Aufgaben. Z. B. Der obige Vater sagt zu seinem Sohne: in meinen zwoen Taschen habe ich etliche Dukaten. Wenn ich aus der rechten Tasche in die linke einen hinüber thue, so habe ich in beyden gleichviel: thue ich aber von der linken in die rechte einen herüber, so sind hier schon 3mal soviel, als dort. Wie viel habe ich überall? Er hat in der rechten x, in der linken y. Nimmt er nun einen von x, und thut ihn zu y herüber: so sind in der rechten $x - 1$, in der linken $y + 1$: also $x - 1 = y + 1$. Thut er aber von y einen zu x, so sind in der rechten $x + 1$, in der linken $y - 1$. Weil aber $x + 1$ dreymal so viel ist, als $y - 1$, so ist dieß mit 3 zu multiplizieren, um es dem $x + 1$ gleich

zu machen. Dann wird $x + 1 = (y - 1) \times 3$. Also sind die Gleichungen

I. $x - 1 = y + 1$

II. $x + 1 = 3y - 3$. Antw. in der rechten 5, in der linken 3.

b) Ein Jude biethet zwo Uhren, eine goldene, und eine silberne, nebst einem Ringe von 12 Dukaten, mit der Bedingniß, feil, daß, wenn er den Ring zur ersten legt, diese dreymal so viel werth sey, als die letzte: legt er hingegen den Ring zur letzten, so ist sie um ein Drittheil mehr werth, als die erste. Wie groß ist der Werth der beyden Uhren? Wenn die erste $= x$, die zweyte $= y$, so ist

I. $x + 12 = 3y$

II. $x + \frac{x}{3} = y + 12$. Antw. Die gold. 16, die silb. $9\frac{1}{3}$ Duk.

§. 35.

3te Aufgabe. Es hat einer 3 Pferde gekauft, deren Werthe x, y u. z so beschaffen sind, daß x mit y, 150 Fl., y mit z, 200, z mit dem halben Werthe von x, 170 Fl. machen. Wie hoch kam ein jedes Pferd zu stehen?

Aufl.. Es ist		Nebengl.
I.	$x + y = 150$	$x = 150 - y$
II.	$y + z = 200$	$z = 200 - y$
III.	$z + \frac{x}{2} = 170.$	

Dieß nun in der Gleichung für z und x gesetzt, giebt

200

$$200 - y + \frac{150 - y}{2} = 170$$

$\times 2$ $$400 - 2y + 150 - y = 340$$

-340 u. $+3y$ $$550 - 340 = 3y$$

Abgek. u. : 3 $$\frac{210}{3} = y = 70$$

x ist $= 150 - 70 = 80$. $z = 200 - y = 130$.

Probe.

I. $80 + 70 = 150$

II. $70 + 130 = 200$

III. $130 + \frac{80}{2} = 170$.

Anmerk. Ich habe §.§.28—35, nur jederzeit die erste Aufgabe besonders ausgezeichnet, und ganz ausgeführet, weil sie eigentlich allemal ein gewisses Fach von Aufgaben bestimmt, worunter alle übrigen der nämlichen Art, gebracht werden können. Diese Eintheilung der algebraischen Aufgaben in gewisse Fächer ist Anfängern sehr vortheilhaft. Ich werde sie daher auch in der Folge noch beybehalten. Wer sich in dergleichen Aufgaben mehr üben will, sehe Hrn. Eulers vollst. Anl. zur Alg. 2ten Absch. 3 Kap. Mahlers Algebra; Christian Riesens Algebra für Sehende und Blinde; P. Mako Elem. Math. Butschany Anfangsg. der Algebra. u. a.

IV. Abschnitt.

Von den Brüchen.

§. 36.

Eine Größe, die nur Theile eines Ganzen anzeigt, heißt ein ächter Bruch (fractio genuina) z.

z. B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{10}, \frac{78}{100}. \frac{a}{b}$

a) Zu einen Bruch gehören also nothwendiger Weise zwo Größen, wovon eine ausdrückt, wie viele, die andere, was für Theile eines Ganzen genommen werden: daher dann die erste der Zähler (numerator) die zwote der Nenner (denominator) genannt wird.

b) Wenn der Nenner dem Zähler gleich oder gar noch kleiner ist, so sind die Brüche falsch oder unächte Brüche z. B. $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{a}{a}$ $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{ab}{a}$ ꝛc. und im ersten Falle sind sie genau = 1 oder einem Ganzen; im zweyten drücken sie mehr als ein Ganzes aus.

c) Nur in Rücksicht auf das Ganze ist der Bruch wirklich ein Bruch. Für sich selbst betrachtet, kann er eben sowohl ein Ganzes seyn, als eine andere Größe. Eine halbe Elle Tuch ist in Rücksicht auf eine ganze Elle ein wirklicher Bruch, für sich selbst betrachtet aber, ist es gewiß ein Ganzes, und kann wieder in Theile getheilt werden, und einen Stoff für Brüche geben.

§. 37.

Alle Brüche können überhaupt durch $\frac{N}{D}$ ausgedrückt werden: denn N kann alle mögliche Zähler, D alle mögliche Nenner bedeuten.

§. 38.

1) Wenn der Zähler eines Bruches mit einer ganzen Zahl multiplizirt wird, so wird der ganze Bruch multiplizirt. D. i. $\frac{N}{D} \times c = \frac{Nc}{D}$

2) Wird aber der Nenner so multiplizirt, so wird der Bruch selbst dividirt. D. i. $\frac{N}{D} : c = \frac{N}{Dc}$

Bew. des Iten. Es sey $\frac{N}{D} = x$, so ist:

$$N = Dx$$

$\times c$ $\qquad N \times c = D x c$

wieder : D $\qquad \frac{Nc}{D} = x c$

Bew. des II. Wenn wieder $\frac{N}{D} = x$

u. $\qquad N = Dx$

so ist : c $\qquad \frac{N}{c} = \frac{Dx}{c}$

: D $\qquad \frac{N}{Dc} = \frac{x}{c}$

a) Wenn also im Gegentheile der Zähler mit einer ganzen Zahl getheilet wird, so wird der Bruch selbst getheilet; er wird vervielfältiget, wenn der Nenner mit der ganzen Zahl getheilt wird.

b) Je größer daher der Zähler ist, desto größer ist der Bruch: je größer aber der Nenner ist, desto klei-

ner

ner ist der Bruch. $\frac{5}{7} > \frac{4}{7}$. $\frac{5}{10} < \frac{5}{8}$, oder wie man sich auch auszudrücken pflegt: Brüche sind gerade, wie ihre Zähler, verkehrt wie ihre Nenner.

§. 39.

Wenn sowohl der Zähler als der Nenner eines Bruches mit einer nämlichen Größe multiplizirt, oder dividirt wird, so bleibt der Werth des Bruches unverändert: oder $\frac{N \times c}{D \times c} = \frac{N}{D}$. $\frac{N : c}{D : c} = \frac{N}{D}$. Weil sich allemal c oben und unten nach §. 20. d. aufhebt: oder weil nach vorhg. §. der Bruch im Nenner eben so vermindert, wie im Zähler vermehrt wird: und wechselweise.

a) Durch die Multiplikation des Zählers mit einer ganzen Zahl läßt sich der Werth eines Bruches bestimmen. Z. B. Wie viel Kreuzer machen $\frac{5}{8}$ Fl.? Der Zähler mit 60 Kr. d. i. mit dem Maaße des Guldens multiplizirt, giebt $\frac{5 \times 60}{8} = \frac{300}{8} = 37\frac{1}{2}$ Kr. So verfährt man auch bey allen Arten der Maaße, Gewichte ꝛc.

b) Durch die Multiplikation des Nenners hingegen können gebrochene Brüche, d. i. solche, deren Nenner wieder Brüche sind. Z. B. $\frac{1}{\frac{4}{5}}$, in einfache verändert werden; man multiplizirt nämlich nur die Nenner in einander, und setzt das Produkt unter den vorigen Zähler. So wird

$$\frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{20}.$$

§. 40.

§. 40.

Ein Bruch wird also reduzirt, d. i. unter einen kleinern Ausdruck oder Benennung gebracht, wenn man eine Zahl sucht, welche den Zähler und Nenner ohne Bruch theilet. So ist z. B.

$$\frac{15}{50} = \frac{15:5}{50:5} = \frac{3}{10}. \quad \frac{abc}{acd} = \frac{b}{d}.$$

a) So einen gemeinschaftlichen Divisor zu finden, gehöret in die gemeine Rechnung. Ueberhaupt ist er 2, wenn sich die letzte Ziffer sowohl des Zählers, als des Nenners mit 2 theilen läßt; 5, wenn sich Zähler und Nenner mit 5 oder 10 enden; 3, wenn die Ziffer eines jeden einzeln zusammenaddirt, nämlich des Zählers sowohl, als des Nenners, genau mit 3 getheilt werden können. rc. So ist z. B.

$$\frac{15}{35} = \frac{15:5}{35:5} = \frac{3}{7}. \quad \frac{10}{18} = \frac{10:2}{18:2} = \frac{5}{9}.$$

$$\frac{24}{27} = \frac{24:3}{27:3} = \frac{8}{9}. \text{ rc.}$$

§. 41.

Mehrere Brüche unter einerley Benennung zu bringen, darf nur der Zähler und Nenner eines jeden Bruches in die Nenner aller übrigen multiplizirt werden: denn so wird einerseits ein gemeinschaftlicher Nenner entstehen: anderseits der Werth der Brüche (§. 39) unverändert bleiben, weil allemal sowohl der Zähler, als Nenner eines jeden Bruches mit der nämlichen Größe d. i. mit dem Produkte der übrigen Nenner verviel-

fäl-

fältiget wird. So ist $\frac{N}{D}$, $\frac{n}{d}$, $\frac{a}{b}$ unter einerley Benennung $= \frac{Ndb}{Ddb}$, $\frac{nDb}{dDb}$, $\frac{aDd}{bDd}$.

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5} = \frac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 4 \times 5}$, $\frac{3 \times 3 \times 5}{4 \times 3 \times 5}$, $\frac{4 \times 3 \times 4}{5 \times 3 \times 4}$.

a) Wenn man zu wissen verlangt, welcher aus zweenen Brüchen größer sey, dürfen sie nur unter einerley Benennung gebracht werden: der größere Zähler wird es entscheiden. So ist $\frac{5}{6} < \frac{8}{9}$ weil $\frac{45}{54} < \frac{48}{54}$

§. 42.

1) Brüche von gleichen Nennern werden addirt, wenn man nur ihre Zähler addirt, und unter die Summe den gemeinschaftlichen Nenner setzt. D. i.

$\frac{M}{D} + \frac{N}{D} + \frac{n}{D} = \frac{M + N + n}{D}$. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$

2) Subtrahirt werden derley Brüche, wenn der Zähler des einen vom Zähler des andern abgezogen, und unterm Rest der vorige Nenner geschrieben wird. d. i. $\frac{N}{D} - \frac{n}{D} = \frac{N - n}{D}$. $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

Der Grund dieser zwoen Regeln liegt selbst in dem Begriffe der Addition und Subtraktion. Denn es fragt sich hier im ersten Falle, wie viel Größen durch D, oder 7 getheilt sind: dieß findet man aber, wenn man

nur

nur die Zähler addirt, und unter die Summe den Nenner D oder 7 setzt. Im zweyten Falle wird nur der Unterschied zwoer Größen gesucht, welche mit einer nämlichen D oder 8 getheilt sind: diesen erhält man aber, wenn der Zähler des einen vom Zähler des andern abgezogen, und unterm Rest der vorige Nenner geschrieben wird.

a) Brüche von verschiedenen Nennern sind also vorher unter einerley Benennung zu bringen, wenn sie addirt, oder von einander subtrahirt werden sollen. $\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{11}{35}$. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$.

b) Sind Brüche zu Ganzen zu addiren, oder von Ganzen zu subtrahiren, so macht man das Ganze, indem man 1 darunter setzt, zu einen Afterbruche, bringt diesen mit den übrigen unter einerley Benenung, und addirt, oder subtrahirt, wie oben. So ist z. B. $4 + \frac{5}{7} = \frac{4}{1} + \frac{5}{7} = \frac{28 + 5}{7} = \frac{33}{7}$. $4 - \frac{5}{7} = \frac{28 - 5}{7} = \frac{23}{7}$. $a + \frac{b}{c} = \frac{a}{1} + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$. $a - \frac{b}{c} = \frac{a}{1} - \frac{b}{c} = \frac{ac - b}{c}$. Wer schon einige Fertigkeit im Rechnen mit Brüchen hat, läßt die Einheit unter dem Ganzen weg; multiplizirt gleich mit demselben die Nenner der Brüche: und addirt zu diesem Produkte ihre Zähler, oder subtrahirt sie davon. Z. B. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = \frac{8x}{8}, + \frac{6x}{8} = \frac{14x}{8}$ ꝛc.

c)

c) Auch kann man, wenn ein Bruch von einem Ganzen abzuziehen ist, von dem Ganzen 1 entlehnen, es zu einem Afterbruche machen, dessen Nenner und Zähler dem Nenner des andern Bruches gleich sind, und dann abziehen. Z. B.

$$3 - \frac{4}{9} = 2 + \frac{9}{9} - \frac{4}{9} = 2 + \frac{5}{9}.$$

§. 43.

1) Brüche in einander zu multipliziren, dürfen nur Zähler in Zähler, und Nenner in Nenner multiplizirt werden. D. i. allgem.

$$\frac{N}{D} \times \frac{n}{d} = \frac{Nn}{Dd}.$$

2) Sie zu dividiren aber, muß der Bruch, welcher der Divisor ist, umgekehrt, und dann wieder Zähler und Nenner in einander multiplizirt werden. D. i.

$$\frac{N}{D} : \frac{n}{d} = \frac{N}{D} \times \frac{d}{n} = \frac{Nd}{Dn}.$$

Bew. des I. Es sey $\frac{N}{D} = a.\ \frac{n}{d} = b.$ Wenn das Produkt beyder Brüche = a b wird, so ist es richtig, daß sie in einander multiplizirt sind. Nun ist aber beyderseits D, und d, durch die Multiplikation übersetzt,

$$N = a\,D$$
$$n = b\,d$$

nach §. 23. e. × $\quad Nn = ab \times Dd$

: D d $\quad \frac{Nn}{Dd} = ab$

D

Bew.

Bew. des II. Wenn wieder $\frac{N}{D} = a.\ \frac{n}{d} = b$: so wird die Division richtig seyn, wenn $\frac{N\,d}{n\,D} = \frac{a}{b}$ ist.

Nun ist aber wieder

$$N = a\,D$$
$$n = b\,d$$

nach §. 23. e. div. $\frac{N}{n} = \frac{a\,D}{b\,d}$

$\times d$ $\frac{N\,d}{n} = \frac{a\,D}{b}$

$: D$ $\frac{N\,d}{n\,D} = \frac{a}{b}$

a) Da bey der Multiplikation ächter Brüche der Nenner: bey der Division der Zähler eines Bruches mit einer größern Quantität, nämlich allemal mit dem Nenner des andern Bruches multiplizirt wird, so sieht man aus §. 38. b, ein, daß im ersten Falle der Werth des Bruches kleiner, im zweyten aber größer werde.

b) Ein Ganzes mit einem Bruche zu vervielfältigen oder zu theilen, darf nur nach §. 42. b das Ganze zu einem Afterbruche gemacht, und dann alles wie bey andern Brüchen vorgenommen werden. Z. B.

$$2 \times \tfrac{3}{4} = \tfrac{2 \times 3}{1 \times 4} = \tfrac{6}{4}. \quad 2 : \tfrac{3}{4} = \tfrac{2 \times 4}{1 \times 3} = \tfrac{8}{3}.$$

Es kann wieder 1 unter dem Ganzen ausgelassen, und nur die Multiplikation desselben mit dem Zähler des andern Bruches verrichtet werden. So ist z. B.

$3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$. $4 : \frac{7}{9} = \frac{36}{7}$. $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$. $a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$.

c) Einen Bruch aber mit einem Ganzen zu multiplizieren, oder zu dividiren, wird nur nach §. 38 im ersten Falle der Zähler, im zweyten der Nenner mit dem Ganzen multiplizirt. $\frac{5}{7} \times 2 = \frac{10}{7}$. $\frac{5}{7} : 2 = \frac{5}{14}$

$$\frac{N}{D} \times c = \frac{Nc}{D}. \quad \frac{N}{D} : c = \frac{N}{Dc}.$$

Anmerk. Mit den Brüchen lassen sich noch viele Vortheile und Abkürzungen anbringen, welche aber eigentlich in die gemeine Arithmetik gehören, und darum hier ausgelassen werden. Von sehr großem Nutzen ist folgende Methode Brüche bequem in er einerley Benennung zu bringen. Man sucht durch die Multiplikation aller Nenner, einen allgemeinen Nenner, theilt denselben durch den Nenner eines jeden Bruches, und multiplizirt jedesmal den Antheil mit dem Zähler. Z. B. in $\frac{2}{3} + \frac{3}{7} + \frac{5}{8}$ ist 168 der allgemeine Nenner. Weil aber 3 in 168, 56mal, 7, 24mal, und 8, 21mal enthalten ist: so wird 2 mit 56, 3 mit 24, und 5 mit 21 multiplizirt. Läßt sich aber in zweenen oder mehrern Brüchen, der größte Nenner durch die kleinern genau theilen: so ist er der allgemeine Nenner, mit dem man wie im ersten Falle verfährt. Z. B. in $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} + \frac{x}{32}$, ist 32 der allgemeine Nenner, welcher mit 2, 4, 8, u. 16 getheilt, die Antheile 16, 8, 4, 2 giebt. Wird nun jeder Zähler mit dem gehörigen Antheile multiplizirt, so entstehen $\frac{16x+8x+4x+2x+x}{32} = \frac{31x}{32}$. Ueberhaupt kann man bey der Multiplikation die kleinen Nenner weglassen, welche aliquote Theile der größern sind. Z. B. in $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6}$ kann 2 als der aliquote Theil von 6 gleich weggelassen, und nur 5 mit 6 multiplizirt werden; dann wird $\frac{15+18+20}{30}$ entstehen.

§. 44.

§. 44.

Wenn der Zähler eines Bruches eine einfache, der Nenner aber eine zusammengesetzte Größe ist, so läßt sich die Theilung in's Unendliche fortsetzen, und der Quotient durch die Näherung suchen.

$\frac{1}{1+b}$, und $\frac{a}{b-c}$ sollen für Beyspiele dienen,

I. Divis. Divid. Quot.

$$
\begin{array}{l|l|l}
1+b & 1 & 1-b+b^2-b^3. \\
 & 1+b & \\
 & -\ - & \\
\hline
 & -b & \\
 & -b-b^2 & \\
 & +\ \ + & \\
\hline
 & b^2 & \\
 & b^2+b^3 & \\
 & -\ \ - & \\
\hline
 & -b^3 --- &
\end{array}
$$

II. Divis. Divid. Quot.

$$
\begin{array}{l|l|l}
b-c & a & \frac{a}{b}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ac^2}{b^3} ---- \\
 & \frac{ab}{b}-\frac{ac}{b} & \\
 & -\ \ + & \\
\hline
 & \frac{ac}{b} & \\
 & \frac{abc}{b^2}-\frac{ac^2}{b^2} & \\
 & -\ \ + & \\
\hline
 & \frac{ac^2}{b^2} --- &
\end{array}
$$

a) Wenn im ersten Beyspiele auch b = 1, so ist $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 ----$. Obgleich hier jedes nachgehende Glied mit dem vorhergehenden = 0 wird, so wird doch die ganze Reihe niemal = 0, weil sie nie vollkommen ist, sondern wo man immer aufhört, ein Quotient = $\frac{1}{2}$, entweder beiahend oder verneinend überbleiben muß. Daher ist $1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, und $1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Niemal $0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}$. Quido Grandi suchte hier also vergebens einen Beweis für die Schöpfung aus Nichts.

b) Auf diese Art kann jeder Bruch z. B. $\frac{a}{e}$ in eine solche unendliche Reihe aufgelöst werden, wenn man $e = b \pm c$ macht.

c) Macht man im 2ten Beyspiele $a = 3$, $b = 6$, $c = 2$. So wäre die Reihe $= \frac{3}{6-2} = \frac{3}{4} = \frac{3}{6} + \frac{6}{36} + \frac{12}{216}$.

Schwerere Aufgaben für Gleichungen mit Brüchen.

§. 45.

1te Aufgabe. Ein Kaufmann gewinnt jährlich den dritten Theil seines Vermögens, braucht aber 1000 Fl. in die Haushaltung; nach drey Jahren ist er noch so reich, als er vorher war. Wie groß war vorher sein Vermögen?

Aufl. Es sey dieß $= x$. So wird es, 1000 Fl. davon abgezogen $= x - 1000$, welches um $\frac{1}{3}$ vermehrt $x - 1000 + \frac{x-1000}{3} = \frac{4x-4000}{3}$ giebt. Fährt man nun also fort, so wird es in den 3 Jahren

1) $x - 1000 + \frac{x-1000}{3} = 4x - \frac{4000}{3}$

2) $\frac{4x-4000}{3} - 1000$ d. i. $\frac{4x-7000}{3} + \frac{4x-7000}{9} = \frac{16x-28000}{9}$. §. 43. Anmerk.

3) $\frac{16x-28000}{9} - 1000$ d. i. $\frac{16x-37000}{9} + \frac{16x-37000}{27} = \frac{64x-148000}{27}$. §. 43. Anmerk.

also ist die Gleich. $\frac{64x-1480000}{27} = 2x$

$\times 27$ $\qquad 64x - 148000 = 54x$

$+ 148000$ $\qquad 64x = 54x + 148000$

$- 54$ u : 10 $\qquad x = \frac{148000}{10} = 14800.$

Der jährliche Gewinn und der nach 3 Jahren erworbene Reichthum sind jetzt leicht zu finden.

a) Ein junger Mensch, der wegen seinen außerordentlichen Fähigkeiten zum Lehramte bestimmt ist, wurde auf Reisen geschickt, um auch die ausländischen Schulen zu besuchen. Nun kömmt er zurücke, und sagt: er habe im ersten Lande 100 Fl. und den 5ten Theil von seinem übrigen Gelde: im zweyten 200 Fl. und wieder den 5ten Theil von dem übrigen verzehret, und ein Land habe ihm soviel gekostet, als das andere. Er war soviel Jahre aus, als er Länder sah. Wie viel sah er nun Länder? Wie viel war sein Reisegeld? Er verzehrte im 1ten Lande $100 + \frac{x-100}{5} = 80 + \frac{x}{5}$. Im zweyten $200 + \frac{x}{5} - \frac{80}{5} - \frac{x}{25} - \frac{200}{5} = 200 + \frac{4x}{25} - 56$ $= 144 + \frac{4x}{25}$.

Gleich.

Gleich. $80 + \frac{x}{5} = 144 + \frac{4x}{25}$

Antw. Das Reisegeld war 1600 Fl. er sah 4 Länder, u. verzehrte überall 400 Fl.

§. 46.

2te Aufg. 40000 Fl. sollen also unter 5 Erben getheilt werden, daß der erste den halben, der zweyte den 4ten, der dritte den 8ten, der vierte den 16ten, der fünfte den 32ten Theil bekomme. Wie viel trifft jeden? Aufl. Die gemeinschaftliche Masse, wovon jeder das Seinige d. i. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ rc. bekommen soll, sey $= x$. So ist die Gleich.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} + \frac{x}{32} = 40000$$

§.43. Anmerk. $\frac{31x}{32} = 40000$

$\times 32$ u. $: 31$ $x = \frac{1280000}{31} = 41290\frac{10}{31}$

Folgl. ist $\frac{x}{2} = 20645 + \frac{10}{62}$

$\frac{x}{4} = 10322 + \frac{1}{2} + \frac{5}{62}$

$\frac{x}{8} = 5161 + \frac{1}{4} + \frac{5}{124}$

$\frac{x}{16} = 2580 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{5}{248}$

$\frac{x}{32} = 1290 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{5}{496}$

$\frac{31x}{32} = 39999 + \frac{2}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{15}{62} + \frac{5}{124} + \frac{5}{248} + \frac{5}{496}$. Diese Brüche machen nach der Anmerk. des §. 43, $\frac{496}{496} = 1$, welches mit 39999 die 40000 herstellt.

a) Ein Student hat die Hälfte seines halbjährigen Kostgeldes verspielt; den dritten Theil im Wirthshause durchgebracht, den vierten Theil von einem Drittheile ist er einem seiner Mitschüler schuldig, und nun bleiben ihm noch 4 Fl. übrig. Wie viel war das Kostgeld? Gleich. $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{3 \times 4} = 4$. Antw. 48 Fl.

b) Ein Springbrunn hat 3 Röhren, und einen Kasten = 1. Von der ersten Röhre allein würde der Kasten in 2 St. voll, von der 2ten in 5, von der 3ten in 6. Wann wird er voll, wenn alle drey zugleich laufen?

Gleich. $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = 1$ oder $\frac{15x + 6x + 5x}{30} = 1$ (§. 43. Anmerk.) Antw. in $1 \frac{2}{13}$ St.

Zweytes Hauptstück.

Von den Würden und Wurzeln.

I. Abschnitt.

Allgemeine Lehren der Würden und Wurzelgrößen.

§. 47.

1) Eine mit sich selbst ein, oder mehrmal multiplizirte Größe heißt eine Würde, oder Potenz (§. 14. 3. c) $a \times a = a^2$ ist die 2te; $a \times a \times a = a^3$, die 3te; $a \times a \times a \times a = a^4$, die 4te Würde ꝛc. Eben so ist a, von a^2, die zwote, oder Quadratwurzel; von a^3, die dritte, oder Kubikwurzel ꝛc.

2) Alle mögliche Würden können durch a^m: alle mögliche Wurzeln durch $\sqrt[n]{a}$ ausgedrückt werden: denn a kann alle mögliche Größen, ^{m} und ^{n} aber alle mögliche Exponenten der Würden und Wurzeln anzeigen.

§. 48.

Gleichnamige Würden und Wurzeln können wirklich addirt, und subtrahirt werden: ungleichnamige sind nur durch die Zeichen zu addiren, und zu subtrahiren. (§. 16 u. 17) oder $a^m + a^m = 2\,a^m$. $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} = 2\sqrt[n]{a}$. $4\,a^m - 2\,a^m = 2\,a^m$. $5\sqrt[n]{a} - 2\sqrt[n]{a} = 3\sqrt[n]{a}$. $\sqrt{a}$ der $\sqrt{a^2}$ addirt, giebt nur $\sqrt{a} + \sqrt{a^2}$; subtrahirt aber $\sqrt{a} - \sqrt{a^2}$.

§. 49.

1) Würden von einerley Wurzeln werden in einander multiplizirt, wenn man nur ihre Exponenten addirt. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2) Sie werden dividirt, wenn man den Exponenten des Divisors, von jenem des Dividends abziehet. $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Es sey $m = 3$, $n = 2$, so ist der Bew.

des I. $a^3 \times a^2 = a\,a\,a\,a\,a = a^5$. §. 19. u. 14. 3.

Auch ist $a^5 = a^{3+2}$

also §. 6. 4. $a^3 \times a^2 = a^{3+2}$

mit m u. n $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Bew. des II. $a^3 : a^2 = \frac{a\,a\,a}{a\,a} = a^1$ §. 20.

auch ist $a^{3-2} = a^1$

also §. 6. 4 $a^3 : a^2 = a^{3-2}$

mit m u. n. $a^m : a^n = a^{m-n}$.

a) Bey zusammengesetzten Größen gilt das nämliche. Z. B. $(a^2 + a^3)\, a^2 = a^4 + a^5$. $(a^3 - a^2) : a = a^2 - a$. $a^2 x^3 \times a x = a^3 x^4$. $x^m y^n \times x y = x^{m+1} y^{n+1}$. $a^2 x^3 : a x = a x^2$.

b) Sind die Exponenten Brüche, so müßen sie vorher unter einen Nenner gebracht, und dann, wie oben behandelt werden. Z. B. $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{4}{8}+\frac{6}{8}} = x^{\frac{10}{8}}$. $y^{\frac{2}{3}} : y^{\frac{2}{5}} = y^{\frac{10}{15}-\frac{6}{15}} = y^{\frac{4}{15}}$.

c) Bey den Potenzen von verschiedenen Wurzeln darf die Multiplikation, oder Division nur angezeigt werden. $a^2 \times b^2 = a^2 b^2$. $x^3 : y^3 = \frac{x^3}{y^3}$.

d) Beyspiele zur Uebung. 1) Für die Multiplikation. I. $a^m \times a^{-m}$. II. $x^2 \times x^m$. III. $x^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{m}{n}}$. IV. $b^{-\frac{2}{7}} \times b^{\frac{3}{4}}$. V. $x^4 \times x^{\frac{2}{3}}$. VI. $x \times 3y^{\frac{1}{2}}$. 2) Für die Division. I. $a^n : a$. II. $y^x : y^5$. III. $z^{\frac{2}{3}} : z^{-\frac{1}{5}}$. IV. $a^r : x^r$. V. $x^4 : x y^2$. VI. $a^m : a^{-m}$.

§. 50.

Eine Würde mit dem Exponenten $= 0$, ist allemal $= 1$: oder $a^0 = 1$.

Bew. $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$ vorg. §.

auch ist $a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1$ (§. 20. b)

Folglich $a^0 = 1$.

a)

a) Es ist also $a^0 = 1 = a^{m-m} = \frac{a}{a} = \frac{a^m}{a^m}$. $10^0 = 1 = 10^{m-m} = \frac{10^m}{10^m}$. D. i. Eine jede Größe zur Würde 0 erhoben, gleicht einem Bruche, dessen Nenner und Zähler einander gleich sind; und umgekehrt.

b) Wegen der Gleichheit dieser Ausdrücke kann nach Bequemlichkeit (§. 6. 5.) einer für den andern gebraucht werden.

§. 51.

Hat die Würde einen kleinern Exponenten, als 0, d. i. einen negativen, so muß sie weniger als 1, d. i. ein Bruch seyn, dessen Zähler = 1, der Nenner aber die nämliche Würde von eben dem positiven Exponenten ist. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Bew. Es ist $a^m : a^{2m} = a^{-m}$ (§. 49. 2.)

Bruchw. $\frac{a^m}{a^{2m}} = \frac{1}{a^m}$ (§. 20.)

Folgl. (§. 6. 4. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

a) Es ist also auch wieder $a^{-2m} = \frac{1}{a^{2m}}$. $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$. D. i. alle Würden negativer Exponenten sind Brüche, und umgekehrt.

b) Nach §. 50 ist $x y^0 = x$. Nach diesem §. 51 aber $x a^{-1} = \frac{x}{a}$. $y a^{-2} = \frac{y}{a^2}$. $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$. $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$.

a

$a\,b^{-\frac{m}{n}} = \frac{a}{b^{\frac{m}{n}}}$. Welche gleichgültige Ausdrücke wie vorg. §. b. wieder wohl zu merken sind.

§. 52.

1) Eine Würde a^m wird zu einer höhern n erhoben, wenn die Exponenten m und n in einander multiplizirt werden. $(a^m)^n = a^{mn}$.

2) Aus einer Würde a^m wird eine jede Wurzel n ausgezogen, wenn man den Exponenten der Würde mit dem Exponenten der Wurzel dividirt. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Es sey wieder $m = 3$, $n = 2$. So ist der

Bew. des I.	$(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = a^6$ §. 49. 1.
Es ist aber auch	$a^{3\times 2} = a^6$
Folglich §. 6. 4.	$(a^3)^2 = a^{3\times 2}$
allgemein	$(a^m)^n = a^{mn}$

Daraus fließt von sich selbst der Bew. des II. Denn durch die Multiplikation der Exponenten entstehen höhere Würden: durch ihre Division müßen also wieder die Wurzeln ausgezogen werden.

a) Multiplizirte und dividirte Größen, oder Brüche zu erheben, und zu erniedrigen, müßen alle Theile erhoben, und aus allen die $\sqrt{}$ gezogen werden.

$$\overline{a\,b\,c}^m = a^m\,b^m\,c^m.\quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

$$\left(\frac{a^{-m}}{x^2}\right)^m = \frac{a^{-m2}}{x^{2m}}.\quad \sqrt[n]{a\,b} = a^{\frac{1}{n}}\,b^{\frac{1}{n}}.\quad \sqrt[n]{\frac{a^n}{b^m}} = \frac{a}{b^{\frac{m}{n}}}.$$

$(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$.

b)

b) Alle Wurzelgrößen können also als Würden angesehen werden, deren Exponenten Brüche sind. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. $\sqrt{(a^2 + b^2)} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[n]{(a+b)^m} = \overline{a+b}^{\frac{m}{n}}$. $\sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$. $\sqrt[3]{15} = 15^{\frac{1}{3}}$.

c) Oft läßt sich die Wurzel wirklich entweder ganz, oder doch zum Theil ausziehen. Z. B. $\sqrt{a^2} = \sqrt{a}^{\frac{2}{2}} = a$. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. $\sqrt{a^2 b c^2} = a c \sqrt{b} = a c b^{\frac{1}{2}}$. $\sqrt{48} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4 \sqrt{3}$. $\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt{5} = 3 \sqrt{5}$. Solche Wurzel- oder Radikalgrößen, aus welchen sich die Wurzel wirklich nicht ausziehen läßt, heißen eigentlich irrationale, oder wurzellose Größen (Quantitates surdae, incommensurabiles). Solche aber aus denen sich die Wurzel ausziehen läßt, rationale, oder wurzelfähige Größen. (Quantitates rationales)

d) Gleichwie die Wurzeln durch die Division des Exponenten der Würde mit dem Exponenten der Wurzel ausgezogen werden, so wird eine Würde mit einem gebrochenen Exponenten in eine Wurzelgröße verändert, wenn nur der Nenner des Exponenten auf das vorausgesetzte Wurzelzeichen geschrieben wird. Z. B. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Wenn der Nenner aus mehrern Größen bestehet, so kann dieß auch theilweise geschehen. $— x^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{— x^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[2n]{— x}$.

e) Einen Koeffizienten als irrational vorzustellen, und hinter das Wurzelzeichen zu bringen, muß er zu der

Po=

Potenz des Exponenten der Wurzel erhoben werden. Z. B. $a\sqrt{x^2} = \sqrt{a^2 x^2} = a x$. $3\sqrt{6} = \sqrt{3^2\, 6} = \sqrt{54}$. $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{e}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a^n e}{b^n d}}$.

§. 53.

Wurzelgrößen lassen sich unter einerley Benennung bringen, wenn man sie (vorherg. §.) zu Würden gebrochener Exponenten machet; dann für die Exponenten, wie bey andern Brüchen (§. 41) einerley Nenner sucht diesen auf die Wurzelzeichen, die Zähler aber auf die Größen setzet. Z. B. Weil $\sqrt[n]{a^m}$ und $\sqrt[p]{a^q} = \sqrt{a^{\frac{m}{n}}}$ und $\sqrt{a^{\frac{q}{p}}}$, und $\frac{m}{n}, \frac{q}{p} = \frac{mp,\, nq}{np}$: so ist $\sqrt[n]{a^m}\ \sqrt[p]{a^q} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ und $\sqrt[np]{a^{nq}}$.

§. 54.

Wurzelgrößen von einerley Benennung werden durch wirkliche Multiplikation und Division der Koeffizienten in einander, und der hinter den Wurzelzeichen befindlichen Größen multiplizirt und dividirt. Z. B. $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^{1+1}} = \sqrt{a^2} = a$. $\sqrt{b^2} \times \sqrt{b^3} = b\sqrt{b^3} = b^{\frac{2}{2}} \times b^{\frac{3}{2}} = \sqrt{b^{3+2}} = \sqrt{b^5}$. $3\sqrt{a} \times 2\sqrt{b} = 6\sqrt{a\, b}$. $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$. $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{25}$. $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \frac{y}{z}\sqrt[v]{\frac{c}{d}} = \frac{py}{qz}\sqrt[nv]{\frac{a^v c^n}{b^v d^n}}$ (§. 53.).

Di=

Divis. $\sqrt{a} : \sqrt{a} = \sqrt{a^{1-1}} = a^0 = 1$. $\sqrt{a^2} : \sqrt{a} = \sqrt{a}$. $6\sqrt[3]{a^n} : 2\sqrt{a^n} = 3\,a^{\frac{2n}{6} - \frac{3n}{6}}$. $\sqrt{a} : \sqrt{a^4} = \sqrt{a^{1-4}} = \sqrt{a^{-3}} = \sqrt{\frac{1}{a^3}}$. $\sqrt{4} : \sqrt{5} = \sqrt{\frac{4}{5}}$.

$$\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} : \frac{y}{z}\sqrt[v]{\frac{c}{d}} = \frac{pz}{qy}\sqrt[nv]{\frac{a^v d^n}{b^v c^n}}$$ (§. 53.)

a) Nach diesen und den allgemeinen Multiplikations- und Divisionsregeln verfährt man auch bey komplexen Größen z. B.

Mult.	Divis.
$3 + 2\sqrt{3}$ $2 - 1\sqrt{3}$ $6 + 4\sqrt{3}$ $\quad - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{9}$ $6 + \sqrt{3} - 2\sqrt{9}$.	$\dfrac{\sqrt{a^3 b^5} + \sqrt{cd}}{\sqrt{a^2 b^2} - \sqrt{xd}} = \sqrt{ab^3} - \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{x}}$

§. 55.

1) Eine Wurzelgröße zu einer Würde zu erheben, darf nur die hinter dem Wurzelzeichen stehende Größe erhoben werden. $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2}$. $(\sqrt[2]{a})^3 = \sqrt[2]{a^3}$

2) Eine Quadrat- oder Kubikwurzel aus einer Wurzelgröße zu ziehen, muß der Exponent der verlangten Wurzel mit jenem des Wurzelzeichens multiplizirt werden. $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$.

Bew. des I. $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2}$. $(\sqrt[2]{a})^3 = \sqrt[2]{a} \times \sqrt[2]{a} \times \sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{a^3}$. (§. 47.)

Bew.

Bew. des II. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ (§. 52.)

$\times \sqrt{}$ $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{4}}$ (§. 38. 2

nach §. 52. d. $= \sqrt[4]{a}$

Folglich $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$.

a) Abgekürzt ist also das Quadrat aus $\sqrt{a} = a$. Der Kubus von $\sqrt[3]{a} = a$; die vierte Potenz von $\sqrt[4]{a} = a$ ꝛc. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}} = \sqrt[6]{a}$. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^z}} = \sqrt[nm]{a^z}$.

b) Eben so ist auch $\left(\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}\right)^{\frac{v}{s}} = \left(\sqrt[n]{\frac{a^n c}{b^n d}}\right)^{\frac{v}{s}} = \sqrt[n]{\frac{a^{\frac{vn}{s}} c^{\frac{v}{s}}}{b^{\frac{vu}{s}} d^{\frac{v}{s}}}} = \sqrt[\frac{ns}{v}]{\frac{a^n c}{b^n d}}$. umgekehrt ist $\sqrt[\frac{v}{s}]{\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}} = \sqrt[\frac{v}{s}]{\sqrt[n]{\frac{a^n c}{b^n d}}} = \sqrt[\frac{nv}{s}]{\frac{a^n c}{b^n d}}$. (§. 52. e.) $\sqrt[6]{1000000} = \sqrt{\sqrt[3]{1000000}} = \sqrt{100} = 10$: oder auch $\sqrt[6]{1000000} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{1000000}} = \sqrt[3]{1000} = 10$.

§. 56.

Wenn das Quadrat einer irrationalen Größe rational ist, so sind alle geraden Potenzen rational, alle ungeraden irrational.

Bew. Alle gerade Exponenten seyen $= 2n$, so sind die ungeraden $= 2n + 1$. Die Wurzel sey $= \sqrt{a}$, von welcher das Quadrat $= a$ rational ist. So ist

I. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ (§. 52.)

$\sqrt{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{2}} = a^{n}$

$\sqrt{a^{2n}} = a^{n}$

II.

$$\text{II. } \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{a}^{2n+1} = a^{\frac{2n}{2}+\frac{1}{2}} = a^n \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a^{2n+1}} = a^n \sqrt{a}$$

Wovon offenbar die erste Potenz rational, die letzte irrational ist. Die Sache läßt sich auch also erklären. Das Quadrat der $\sqrt{a}$ ist $= \sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2}$, also rational. Der Kubus ist $a \sqrt{a}$, also irrational. Die vierte Potenz, $a \sqrt{a} \sqrt{a} = a \sqrt{a^2} = a^2$, wieder rational. $a^2 \sqrt{a}$ endlich die fünfte, und wieder irrational ꝛc. Eben so ist das Quadrat der $\sqrt{5} = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{25}$ rational; der Kubus $5 \sqrt{5}$ irrational. Die vierte Potenz $5 \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5 \sqrt{25} = 5 \times 5 = 25$ rational. u. s. w.

§. 57.

1) Von einer negativen Größe sind alle Potenzen gerader Exponenten positiv, ungerader aber negativ.

2) Darum sind die Wurzeln negativer Potenzen, welche gerade Exponenten haben, unmöglich (radices imaginariae); nicht aber jener, welche ungerade Exponenten haben. Bew. des I.

$$-a \times -a = +a^2$$

$$-a \times -a \times -a = -a^3$$

$$-a \times -a \times -a \times -a = +a^4$$

$$-a \times -a \times -a \times -a \times -a = -a^5 \text{ ꝛc.}$$

Das IIte folget aus diesem von sich sich selbst; denn die $\sqrt{}$ aus $-a^2$ kann weder $+a$, noch $-a$ seyn, weil beyde $+a^2$ geben. Eben so kann auch

weder + a noch — a die Wurzel aus — a^4 seyn ꝛc. aber aus — a wird — a^3 — a^5 ꝛc. — a ist also die $\sqrt{}$ von allen Würden ungerader Exponenten.

a) Alle Wurzeln von geraden Exponenten können also zweyerley seyn, positiv und negativ. $\sqrt{9} = \pm 3$. Die Wurzeln von ungeraden Exponenten aber haben nur das Zeichen, welches ihre Würde hat. Z. B. $\sqrt[3]{-8} = -2$.

b) Das Quadrat einer unmöglichen Wurzel ist ihre Größe selbst. Z. B. $(\sqrt{-4})^2 = -4$.

§. 58.

Alle unmögliche Wurzeln können überhaupt als Quadratwurzeln negativer Größen angesehen werden, es mögen die Größen möglich oder unmöglich seyn.

Bew. Wenn *n* eine ganze positive Größe ist, so ist $\sqrt[2n]{-x}$ ein allgemeiner Ausdruck für alle gerade unmögliche Wurzeln (§. 57. 2). Nun ist aber

$$\sqrt[2n]{-x} = -x^{\frac{1}{2n}} \text{ (§. 51.)}$$

$$= \sqrt{(-x)^{\frac{1}{n}}} \text{ (§. 52. d.)}$$

Folgl. $$\sqrt[2n]{-x} = \sqrt{(\sqrt[n]{-x})}$$

a) So ist $\sqrt[6]{-x} = \sqrt{(\sqrt[3]{-x})}$ wo $\sqrt[3]{}$ möglich. $\sqrt[8]{-x} = \sqrt{(\sqrt[4]{-x})}$ wo $\sqrt[4]{}$ unmöglich ist.

b) Weil $\sqrt{-a} = \sqrt{-1\,a}$ (§. 14. b) und $-1\,a = -1 \times +a$ (§. 18.) so ist auch $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$. D. i. sie kann in zween Faktorn auf-

aufgelöset werden, wovon $\sqrt{+a}$ eine mögliche Größe ist, und die unmögliche auf $\sqrt{-1}$ gebracht wird. Eben daher wird $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$. $\sqrt{-36} = \sqrt{36} \times \sqrt{-1} = 6\sqrt{-1}$ u. s. w.

Anmerk. Diese mögen wohl die Grundsätze von den Würden und Wurzeln seyn, welche einem Anfänger nicht unbekannt seyn dürfen, wenn er sich an die Lehre des Hrn. Hofrath Kästners in seinen Anfangsgr. der Anal. endlicher Größen 228 Lehrs. u. ff. wagen will. So viel sie dem ersten Anscheine nach Schwierigkeiten zeigen, so werden sie doch durch viele Uebung, und stuffenweise gewählte Beyspiele leichter begriffen, als man zu glauben pflegt. Ich habe deßwegen eben diese stuffenweise Ordnung der Beyspiele beobachtet. Mehrere, besonders mit zusammengesetzten Größen können theils in Klems mathem. Lehrb. §. 202. Eulers Anl. zur Alg. 2 Abschn. 1 — 8 Kap. De la Caille Elem. Algeb, Mako comp. institut. Math. u. a. gefunden werden.

II. Abschnitt.

Von den zehentheiligen Brüchen.

§. 59.

Ein Bruch, dessen Nenner eine Würde aus 10 ist, heißt ein zehentheiliger oder Dezimalbruch z.B. $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{5}{1000}$. Man läßt daher den Nenner gleich weg, und setzt dem Zähler linkerhand so viele Nullen vor, bis die Menge seiner Zahlzeichen der Menge der Nullen, die der Nenner haben müßte, gleich wird; das Ganze aber trennet man durch (,) oder, wenn keines da ist

 setzt,

setzt man o an seine Stelle. So ist $\frac{2}{10} = 0, 2$. $\frac{3}{1000} = 0, 003$. $2\frac{157}{1000} = 2, 157$. Die letzte Zahl wäre also 2 Ganze, 1 Zehentheil, 5 Hunderttheile, und 7 Tausendtheile. Man sagt auch: 2 ganze und 157 Tausendtheile.

a) Weil $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$ (§. 39.) u. s. w. so kann man einem Dezimalbruche rechterhand so viele Nullen zusetzen, als man will, ohne deßwegen seinen Werth zu verändern. Darum ist $0, 3 = 0, 30 = 0, 300 = 0, 3000$ ꝛc.

§. 60.

1) Nach (§. 50. 51.) ist $723, 456 = 7 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3}$. Eben so ist $0, 3 = 3 \times 10^{-1}$. $0, 34 = 34 \times 10^{-2}$. $0, 375 = 375 \times 10^{-3}$ u. s. w.

2) Alle Dezimalbrüche können also allgemein durch $a \times 10^{-m}$ ausgedrückt werden.

a) Der Exponent -1, -2, $-m$ zeigt also die Würde an, zu der der Faktor 10 einer Zahl erhoben ist: und drückt zugleich die Entfernung einer Ziffer von der Einheit aus.

b) Es enthält daher dieser Exponent allemal so viel Einheiten, als wirklich Dezimalen vorhanden sind: und die Anzahl der Dezimalen drückt selbst den Exponenten aus. Eine Menge von 4 Dezimalen zeigt schon an, daß der Exponent -4 da stehen soll.

§. 61.

§. 61.

Wenn man daher Dezimalen in einander multiplizirt oder dividirt, so ist 1) die Anzahl derselben im Produkte, gleich ihrer Summe in beyden Faktorn.

2) Die Anzahl der Dezimalen im Quotienten, gleichet dem Unterschiede ihrer Anzahl im Divisor und Dividend.

Bew. des I. Es sey $a \times 10^{-m}$, ein Dezimalbruch, $b \times 10^{-n}$ der andere: so ist $a \times 10^{-m} \times b \times 10^{-n} = a\,b \times 10^{-m-n}$ (§. 49.) d. i. dem Produkte der Zahlen $\times$ mit 10, zu der Würde erhoben, welche die Summe ihrer vorigen Exponenten anzeigt: es ist aber diese Summe gleich der Anzahl der Dezimalen in beyden Faktorn (vorhg. §. 60. b.) so giebt dann diese die Dezimalen des Produkts.

Bew. des II. In diesem Falle ist

$$\frac{a \times 10^{-m}}{b \times 10^{-n}} = \frac{a}{b} \times 10^{-m+n} \text{ (§. 49.)} =$$

dem Quotienten der Zahlen, multiplizirt mit 10, zu der Würde erhoben, welche der Unterschied ihrer vorigen Exponenten bestimmt: es ist aber dieser Unterschied wieder gleich dem Unterschiede der Dezimalen im Divisor und Dividend. (§. 60. b.) So giebt dann dieser die Dezimalen des Quotienten.

§. 62.

§. 62.

Dezimalbrüche zu addiren, oder zu subtrahiren, werden Ganze unter Ganze, und Dezimalen unter Dezimalen also gesetzt, daß auch die Scheidezeichen genau untereinander zu stehen kommen, dann wird wie bey ganzen Zahlen addirt und subtrahirt; das gerade unter die obigen gesetzte Scheidezeichen, wird die Dezimalen in der Summe oder im Reste abschneiden.

Addition	Subtraktion.
23, 045	18, 045
2, 31	2, 306
0 98	15, 739
26, 335	

Bew. Die gerade unter einander stehenden Dezimalen sind nichts anders als Zähler der Brüche von gleichen Nennern. (§. 58.) Diese werden aber addirt, oder subtrahirt, wenn man nur ihre Zähler addirt, oder subtrahirt. (§.42.) Daß $\frac{10}{10} = 1$: oder daß die dem Scheidezeichen nächsten Dezimalen, wenn sie addirt > 10 sind, zu den Ganzen kommen, und, daß umgekehrt bey der Subtraktion Ganze in Dezimalen verwandelt werden, ist für sich selbst einleuchtend.

a) Wenn bey der Subtraktion die untere Zahl mehrere Dezimalen hat, als die obere, so setzt man dieser (§. 59. a) so viele Nullen zu, bis die Zahlzeichen beyderseits an der Menge gleich sind. Z. B. von 18,04 sey zu subtrahiren 2, 3402. Man verfährt also:

$$\begin{array}{r} 18,\ 0400 \\ 2\ \ 3402 \\ \hline 15\ \ 6998 \end{array}$$

§. 63.

1) Bey der Multiplikation und Division werden Dezimalen (sie mögen mit Ganzen vermischt seyn oder nicht) als lauter Ganze angesehen, und wie Ganze multiplizirt und dividirt.

2) Doch setzt man im ersten Falle so viele Dezimalen im Produkte, als die Summe ihrer Anzahl in beyden Faktorn; im zweyten, als der Unterschied derselben im Divisor und Dividend war. (§. 61) Z. B. Es sey 1, 24 zu multipliziren mit 0, 132; und 0, 1728 zu theilen mit 0, 12: so ist

Multip.

$$\begin{array}{r} 132 \\ 124 \\ \hline 528 \\ 264\ \ \\ 132\ \ \ \ \\ \hline 16368 \end{array} = 0,\ 16368$$

Divis.

$$12 \rangle 1728 \langle 144 = 1,\ 44$$

$$\begin{array}{r} 12\ \ \\ \hline 52 \\ 48 \\ \hline 48 \\ 48 \\ \hline 0 \end{array}$$

a) Sind wieder im Divisor mehr Dezimalen als im Dividend, so werden immer dem letzten (§. 59. a.) Nullen beygesetzt, und dann so lange fort dividirt, als es nothwendig ist. Z. B. 8, 4 seyen mit 20, 024 zu dividiren, so steht die Operation also:

```
84000|4, 19 - - -
20024|
80096|
 39040
 20024
 190160
  20024
 180216
— 9944 - - - -
```

Wollte man noch ein oder mehr Nullen zusetzen, so würde der Quotient noch durch kleinere Theile, und also genauer bestimmt werden. Man kann damit so lange fortfahren, bis die Theile so klein werden, daß sie für nichts mehr zu achten sind.

§. 64.

Wie weit man mit Dezimalbrüchen fortrechnen, oder wie viel Dezimalen man suchen müße, ist 1) aus dem Gegenstande der Rechnung zu schließen. Von einem Pfunde Eisen achtet man freylich $\frac{1}{10}$ nicht: wohl aber bey dem Silber $\frac{1}{100}$; bey dem Golde $\frac{1}{10000}$ einer Mark. Eben dieß ist auch bey Waaren von verschiedenem Werthe z. B. Pfeffer und Safran; Wolle und Seide: bey Messung sehr großer Linien, Körper rc. zu beobachten. Bey physikalischen Versuchen pflegt man die Bestimmung so genau, als sie sicher geschehen kann, zu machen.

2) Wenn einige Dezimalen weggelassen werden, und die erste der weggelassenen 5 oder gar noch grö-

ßer

größer, als 5 ist, so vermehret man die letzte Ziffer, von denen, welche man behält, um 1, um den Mangel zu ersetzen, der durch die weggelassenen Dezimalen entsteht. Wenn z. B. von 3, 46452 drey Dezimalen verlangt würden, so schreibt man 3, 465; würden aber nur zwo verlangt, so müßte man 3, 46, nicht 3, 47 setzen.

§. 65.

Aufg. Man soll einen jeden gegebenen Bruch z. B. $\frac{3}{8}$ in einen Dezimalbruch verändern.

Aufl. Man setzt zum Zähler 3, so viel Nullen, als man will, und dividirt dann mit dem Nenner 8, so ist $\frac{3000}{8} = 0, 375$.

Anmerk. Man hat auch sechzigtheilige Brüche, deren Nenner nämlich eine Potenz von 60 ist. Sie kommen in der Geometrie und den Zeitrechnungen vor, wo im ersten Falle ein Grad, im zweyten eine Stunde, in 60 Minuten; eine Minute in 60 Sekunden; eine Sekunde in 60 Terzen u. s. f. eingetheilt wird. Man schreibt z. B. $20^{\circ}\ 30'\ 45''\ 17'''$. 20St. $30'\ 45''\ 17'''$, wo o. ' '' ''' gleichsam die Exponenten der Potenz von 60 sind, zu der ein jedes Paar Ziffer erhoben ist.

Weil $60''$ eine Primminute, $60'$ eine Stunde ausmachen, so folgt wohl daraus, daß man hier bey der Addition jede $60''$ zu den Minuten zählen: bey der Subtraktion aber, eine Minute $= 60''$, entlehnen müße, um subtrahiren zu können, wenn sonst die obere Zahl kleiner wäre, als die untere. Hier sind ein Paar Beyspiele:

	St.								
I. Add.	2	4′	5″	40‴	II. Subt.	18°	03′	04″	35‴
	15	58	48	55		15	58	48	55
	18	2′	54″	35‴		2°	04′	15″	40‴

Es wird nämlich im letzten Beyspiele die obere Zahl, wenn man einen Grad in 60′ eine Minute in 60″ u. s. w. verwandelt, $= 17^{St.}\ 62'\ 63''\ 95'''$, wovon die untere abgezogen werden kann. Bey der Multiplikation z. B. $17^\circ \times 46'''$ werden 17 mit 46 multiplizirt, das Produkt mit 60 getheilt. Die erste Theilung giebt Minuten, die zweyte Sekunden u. s. w. So ist $17 \times 46 = \frac{782}{60} = 13'\ 2''$. Bey der Division wird alles bruchweise ausgedrückt, und dann wie §. 43. dividirt. Z. B. $33' : 16'' = \frac{33}{60} : \frac{16}{60^2} = \frac{33 \times 60^2}{60 \times 16}$ $= \frac{33 \times 60}{16}$ (§. 20. c.) $= 123\,\frac{12}{16}$. Welches mit 60 getheilt $= \frac{123}{60}$ oder 123′ u. $\frac{12}{16}$ einer Minute d. i. $2^\circ\ 3'\ 45''$ giebt.

III. Abschnitt.

Von der zweyten und dritten Würde, und den hieher gehörigen Gleichungen in's Besondere.

§. 66.

Wenn man $a + b$ oder $a - b$ mit sich selbst multiplizirt, d. i. zur Quadratwürde erhebt, so ist

I. $(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$

II. $(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$

Und wenn $a = 5$, $b = 2$

I. $(5+2)^2 = 25 + 20 + 4 = 49$

II. $(5-2)^2 = 25 - 20 + 4 = 9$

§. 67.

§. 67.

1) Das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel bestehet also, aus dem Quadrate des ersten Theils: aus dem doppelten Produkte des ersten Theils in den zweyten, und aus dem Quadrate des zweyten Theils.

2) Das doppelte Produkt des ersten Theils in den zweyten wird beiaht, wenn der zweyte Theil beiaht, oder die Wurzel $a + b$ ist: verneint, wenn der zweyte verneint, oder die Wurzel $a - b$ ist.

3) $a^2 \pm 2\ a\ b + b^2$ ist also eine allgemeine Formel für alle Quadrate.

a) Bey buchstäblichen Größen muß also ein jedes Quadrat diese drey Theile enthalten, wenn es aus komplexen Größen bestehet. Bey Ziffern aber, wenn das Quadrat > 1 ist: denn hernach kann es allemal als eine komplexe Größe angesehen werden.

b) Wenn eine Quadratzahl aus mehrern Ziffern bestehet, so hat das Quadrat des letzten Theiles ihr niedrigstes Ziffer unter den Einsern: das doppelte Produkt des ersten Theils in den zweyten unter den Zehnern: das Quadrat des ersten Theils aber unter den Hundertern. Es zeigt sich dieß, wenn wir nur z.B. $47 = 40 + 7$ quadriren, und die 3 Theile ordentlich so untereinander setzen, daß sie addirt das Quadrat 2209 geben, dann wird

$$a^2 = 1600$$
$$2ab = 560$$
$$b^2 = 49$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2209$$

Wo b^2 unter 9: $2ab$ unter 0: a^2 unter 2 seinen Anfang hat.

b) $x^2 + 8x$, $x^2 - x$, $x^2 + ax$ u. d. g. sind keine vollkommene Quadrate, indem das Quadrat des letzten Theils fehlt. Denn weil x nebst seinem Quadrate im ersten Falle mit 8, im 2ten mit — 1 (§. 14. b) im 3ten mit a multiplizirt ist: so ist nebst dem Quadrate des ersten Theils x, noch ein Produkt desselben in eine andere Größe 8, — 1, ꝛc. da. Dieß muß das doppelte Produkt des 1ten Theils in den 2ten seyn: weil nach dem binomischen Lehrsatze jedes Produkt aus dem 1ten Theil in was immer für eine Größe schon ein solches doppeltes Produkt ist. Es ist aber $8x$, $-1x$ ꝛc. nur in soferne das doppelte Produkt, als der doppelte 2te Theil in den ersten multiplizirt ist. Denn dieser ist nur $= 1x = \sqrt{x^2}$. Die Koeffizienten 8, — 1 ꝛc. sind also die doppelten: ihre Hälften 4, $-\frac{1}{2}$ ꝛc. die einfachen 2ten Theile. Werden nun diese quadrirt, so sind 16, $\frac{1}{4}$ ꝛc. auch überall das Quadrat des letzten Theils: folglich die vollkommenen Quadrate:

$$x^2 + 8x + 16.$$
$$x^2 - x + \tfrac{1}{4}.$$
$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4}.$$

§. 68.

§. 68.

Das Quadrat eines Polynomiums, oder einer vieltheiligen Wurzel bestehet aus den Quadraten aller Glieder, und aus der doppelten Summe jeder vorhergehenden Glieder in die nachfolgenden, oder wenn es geordnet ist: aus dem Quadrate des ersten Theils, dem doppelten Produkte des ersten in den zweyten Theil, und aus dem Quadrate des zweyten Theils: aus dem doppelten Produkte des ersten in den 3ten, dann auch des zweyten in den dritten, und dem Quadrate des dritten Theils ꝛc. d. i. $(a+b+c) \times (a+b+c) = \overline{a+b+c}^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$.

a) Wenn $a+b=e$: so ist $(a+b+c)^2 = (e+c)^2$, woraus folget, daß alle Quadrate, wie viel sie immer Theile enthalten mögen (denn von $a+b+c+d$ ꝛc. gilt das nämliche) auf das Quadrat einer binomischen $\surd$ gebracht werden können.

b) Durch diese und die obige Formel (§. 67. 3.) können Größen oft weit bequemer, als durch die Multiplikation zur Quadratwürde erhoben werden. So ist $34^2 = \overline{30+4}^2 = (24+10)^2$. $15^2 = (10+5)^2 = (5+5+5)^2 = (6+2+4+3)^2$ ꝛc.

§. 69.

Wenn man von $a^2 + 2ab + b^2$ die Würzel aus a^2 sucht, so erhält man den ersten Theil $= a$ von der Wurzel $a+b$. Theilt man nun das nächste Glied mit

mit 2 a, (welches Deutlichkeit halber in ( ) eingeschlossen wird), so erhält man auch den zweyten Theil der Wurzel = b; denn dieß b mit 2 a, und mit sich selbst multiplizirt giebt $2ab + b^2$, welches von obigen $2ab + b^2$ abgezogen, genau aufgeht.

	Quadr.	Wurzel.
	$a^2 + 2ab + b^2$	$a + b$
$a^2 =$	a^2	
	—	
	0 $\quad 2ab + b^2$	
$: 2a =$	$(2a)$	
$2a \times b =$	$2ab$	
$+ b \times b =$	$+ b^2$	
	$2ab + b^2$	
	— —	
	0	

a) $a + b$ muß also die $\sqrt{}$ aus $a^2 + 2ab + b^2$ seyn, indem es nach und nach zum Quadrate wieder erhoben, selbes vollkommen erschöpfet hat.

§. 70.

Weil also alle komplexen Quadratgrößen aus $a^2 \pm 2ab + b^2$ bestehen, wovon $a \pm b$ die Wurzel ist; so werden alle Quadratwurzeln ausgezogen, wenn der erste Theil = a, der 2te = b gemacht, dann immer nach und nach $a^2 \pm 2ab + b^2$ weggenommen wird: indem man 1) von a^2 die Wurzel sucht; u. ihr Quadrat von a^2 abzieht. 2) den 1ten Rest, oder das folgen=

gende Glied immer mit 2 a theilt, um (§. 10. b) b zu bekommen, dann 3) $2ab + b^2$ macht, und dieß vom 2ten und 3ten Gliede abzieht. 4) Jetzt die ganze bisher gefundene Wurzel als a ansieht, und verdoppelt, oder = 2 a macht: mit diesem den IIten Rest, oder das 4te Glied dividirt, und so immer fortfährt.

§. 71.

1te Aufg. Aus $4x^2 + 12cx + 9c^2 - 4adx - 6acd + a^2d^2$, die Quadratwurzel ausziehen.

Aufl.

$$4x^2 + 12cx + 9c^2 - 4adx - 6acd + a^2d^2$$

$a^2 = 4x^2$ — Wurzel. $2x + 3c - ad$

I. Rest = $0 \quad 12cx + 9c^2$

$:2a = \quad (4x)$

$2ab + b^2 = \quad 12cx + 9c^2$

II. Rest = $0 \quad -4adx - 6acd + a^2d^2$

$:2a = \quad (4x + 6c)$

$\times 2ab + b^2 = \quad -4adx - 6acd + a^2d^2$

$+ \quad + \quad -$

0

Wenn

Wenn ein Rest zurückbleibt, aus dem sich keine √ mehr ausziehen läßt, so wird er mit vorgesetzten √ zu der gefundenen übrigen Wurzel geschrieben z. B. √ aus $x^2 + 2x - cx + 1 = x + 1 + \sqrt{} - cx$.

§. 72.

2te Aufgabe aus 80089 die Quadratwurzel ausziehen.

Aufl. 1) Man theilet die Zahl von der Rechten gegen die Linke zu in Klassen ein, wovon eine jede zwey Ziffer enthält: weil kein Quadrat einer einfachen Zahl aus mehrern Ziffern bestehen kann: sucht aus dem nächst kleinern Quadrate der ersten Klasse die √ hier = 2, und schreibt sie rechterhand zur Quadratgröße hin, ziehet ihr Quadrat von der ersten Klasse ab, und setzt zum I. Rest die zweyte herab. 2) dividirt man mit $2a = 4$, mit dem man aber um ein Ziffer fortrückt, weil 2 a unter den Zehnern, seine niedrigste Stelle hat. (§. 67. b.) ob es gleich noch in dem ersten Ziffer enthalten wäre; und setzt den gefundenen Quotienten zur Wurzel des ersten Theils. 3) macht man $2ab + b^2$, und schreibt es wieder so an, daß 2 a b unter den Zehnern, b^2 unter den Einsern seinen Anfang nehme, oder sammelt beyde gleich in eine Summe, subtrahirt sie vom I. Reste, und setzt die 3te Klasse dazu. 4) Sieht man die ganze bisher gefundene √ oder 28 als den ersten Theil an, verdoppelt ihn, und theilt damit den II. Rest; rückt aber wieder um ein Ziffer fort, und verfährt übrigens wie vorhin.

Qua=

	Quadrat	Wurzel.
	8 | 00 | 89 |	283
$a^2 =$	4	
I. Rest =	400	
$: 2a =$	(4)	
$2ab =$	32	
$+ b^2 =$	64	
$2ab + b^2 =$	384	
II. Rest	= 1689	
$: 2a =$	(56)	
$2ab + b =$	1689	
	0	

a) Wenn sich eine Klasse mit dem doppelten ersten Theile, oder 2 a nicht theilen läßt, so schreibt man zur Wurzel, und zum Theiler 0; setzt die folgende Klasse herab, und rückt den Theiler um ein Ziffer weiter fort. Z. B.

	4 | 20 | 25 |	205
$a^2 =$	4	
I. Rest =	020	
$: 2a =$	(4)	
II. Rest =	2025	
$: 2a =$	(40)	
$2ab + b^2 =$	2025	
	0	

§. 73.

§. 73.

3te Aufg. Die Wurzel einer Quadratzahl, die sich nicht genau ausziehen läßt, durch die Näherung suchen.

Aufl. Man setzt dem letzten Reste zwo Nullen zu (so viel nämlich eine Klasse Ziffer enthält) und fährt, wie bisher mit der Ausziehung der Wurzel fort: unterscheidet aber die neuen Quotienten, weil sie Dezimalen sind, von den vorigen mit (,). Z. B.

	17 | 79 } 42 , 17 - - -
$a^2 =$	16
I. Rest =	179
$: 2a =$	(8)
$2ab + b^2 =$	164
II. Rest =	1500
$: 2a =$	(84)
$2ab + b^2 =$	841
III. Rest =	65900
$: 2a =$	(842)
$2ab + b^2 =$	58989
IV. Rest =	6911 - - -

So kann man nun immer fortfahren, und der wahren Wurzel (§. 63. a) so nahe kommen, daß der Mangel von derselben ganz unbeträchtlich werde.

§. 74.

1) Wenn man $(a+b)^2$ nochmal mit $(a+b)$; $(a-b)^2$ nochmal mit $(a-b)$ multiplizirt, oder zur dritten Würde erhebt, so ist I.

I. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

II. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

In Ziffern, und wenn $a = 5$, $b = 2$

I. $(5+2)^3 = 125 + 150 + 60 + 8 = 343$

II. $(5-2)^3 = 125 - 150 + 60 - 8 = 27$

§. 75.

1) Der Kubus einer zweytheiligen Wurzel bestehet also aus dem Kubus des ersten Theils: aus dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils in den zweyten: aus dem dreyfachen Quadrate des zweyten in den ersten, und aus dem Kubus des letzten Theils.

2) Alle Glieder dieser Würde sind beiahend, wenn die Wurzel beiahend, oder $a + b$ ist: ist aber das 2te Glied verneinend, oder die Wurzel $a - b$, so ist das erste und 3te Glied beiahend, das 2te und 4te verneinend.

3) $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ ist daher wieder eine allgemeine Formel für alle Wurzeln.

a) Eine jede komplexe Kubikgröße muß also eben so, wie §. 67. a. von dem Quadrate gesagt worden, diese 4 Theile enthalten.

b) Können die Größen wieder nicht nur in Buchstaben, sondern auch in Zahlen öfters bequem durch diese Formel zum Würfel erhoben werden, z. B. $24^3 = \overline{20+4}^3$. $48^3 = \overline{40+8}^3$.

c) Bey einer Kubikzahl, welche aus mehrern Ziffern bestehet, hat b^3 unter den Einsern; $3ab^2$ un-

ter den Zehnern; $3\,a^2\,b$, unter den Hunderten, und a^3 unter den Tausendern seinen Anfang oder sein niedrigstes Ziffer. Im Kubus 103823 fängt sich b^3 unter 3, $3\,ab^2$ unter 2, $3\,a^2\,b$ unter 8, a^3 unter 3 an.

§. 76.

Der Kubus eines Polynomiums oder vieltheiligen Wurzel bestehet 1) aus dem Kubus eines jeden Theils 2) aus dem dreyfachen Quadrate der Summe aller vorhergehenden in die nachfolgenden Theile 3) aus der dreyfachen Summe der vorhergehenden in die Quadrate der nachfolgenden. D. i. $(a+b+c) \times (a+b+c) \times (a+b+c) = \overline{a+b+c}^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3 + 3\,a^2\,c + 6\,a\,b\,c + 3\,b^2\,c + 3\,a\,c^2 + 3\,b\,c^2 + c^3$. Wo a^3, b^3, c^3 die Würfel jeder Theile; $3\,a^2\,b$ und $3\,a^2\,c + 6\,a\,b\,c + 3\,b^2\,c$ das 3fache Quadrat der Summe aller vorhergehenden Theile in die folgenden; $3\,a\,b^2$ und $3\,a\,c^2 + 3\,b\,c^2$ die dreyfache Summe der vorhergehenden in das Quadrat der folgenden ist.

a) In $(a+b+c)^3$ sey $a+b=e$: so ist $(e+c)^3 = (a+b+c)^3$. Und es zeigt sich wieder, daß alle Würfel der vieltheiligen Wurzeln auf den Würfel einer zweytheiligen zurückgeführt werden können.

§. 77.

Wenn man von $a^3 \pm 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 \pm b^3$ aus a^3 die $\sqrt[3]{} = a$ nimmt, so erhält man den ersten

Theil

Theil der zweytheiligen Wurzel $a \pm b$. Theilt man nun das nächste Glied mit $3\,a^2$, so erhält man auch (§. 10. b.) den zweyten Theil $\pm b$. Und wenn man diesen mit dem 3fachen Quadrate des ersten Theils oder dem Theiler $3\,a^2$ multiplizirt, das Produkt unter das 2te Glied schreibt; dann b^2 auch mit $3\,a$ oder dem dreyfachen ersten Theile multiplizirt, dieß unter das 3te Glied setzt, und dazu seinen eigenen Kubus addirt, welcher gerade unter dem 4ten Gliede stehen soll: so erhält man $\pm 3\,a^2 b + 3\,a b^2 \pm b^3$, welches von dem obigen $\pm 3\,a^2 b + 3\,a b^2 \pm b^3$ abgezogen, dasselbe gänzlich erschöpft:

$$
\begin{array}{lll|l}
 & \text{Würfel} & & \text{Wurzel.} \\
 & a^3 \pm 3\,a^2 b + 3\,a b^2 \pm b^3 & & a \pm b \\
a^3 = & a^3 & & \\
\hline
 & 0 \pm 3\,a^2 b + 3\,a b^2 \pm b^3 & & \\
3\,a^2 = & (3\,a^2) & & \\
3\,a^2 \times \pm b = & \pm 3\,a^2 b & & \\
3\,a \times b^2 = & \quad + 3\,a b^2 & & \\
\pm b \times \pm b \times \pm b = & \qquad \pm b^3 & & \\
\hline
 & \pm 3\,a^2 b + 3\,a b^2 \pm b^3 & & \\
 & \mp \quad - \quad \mp & & \\
\hline
 & 0 \quad 0 \quad 0 & &
\end{array}
$$

a) $a \pm b$ muß daher die Kubikwurzel seyn, indem es nach und nach zur Kubikwürde erhoben, den Kubus vollkommen erschöpft hat.

§. 78.

Weil alle polynomische Würfel aus $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ bestehen, wovon $a \pm b$ die $\sqrt[3]{}$ ist: so werden beynahe wie die Quadratwurzeln (§. 70) aus allen Würfeln die Kubikwurzeln ausgezogen. Es wird nämlich der erste Theil $= a$, der 2te $= b$ gemacht: dann 1) die $\sqrt[3]{}$ aus a^3 gesucht, und sein Kubus von dem ersten Gliede des Kubus abgezogen. 2) Der Rest mit $3a^2$ getheilt, welches Deutlichkeit halber wieder in ( ) eingeschlossen wird. 3) $\pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ genommen; jede dieser Größen aber so gesetzt, daß man bequem abziehen könne. 4) Diese jetzt in eine Summe gesammelt, von den obigen entsprechenden Gliedern abgezogen, und der Rest herab geschrieben. 5) Die ganze bisher gefundene Wurzel als a angesehen: $= 3a^2$ gemacht; mit diesem der Rest getheilt: der Quotient $= b$, wieder zur $\sqrt[3]{}$ geschrieben, dann wieder $\pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ gemacht u. s. w.

Z. B.

Würfel.

$8a^3 + 12a^2x + 6ax^2 + x^3 + 12a^2y + 12axy + 3x^2y$

$a^3 = \underline{8a^3}$ $\qquad (+ 6ay^2 + 3xy^2 + y^3$

Rest $= 0 \quad 12a^2x + 6ax^2 + x^3$ $\qquad$ Wurzel.

$:3a^2 = \quad (12a^2)$ $\qquad (2a + x$ ꝛc.)

$3a^2b = \quad 12a^2x$

$3ab^2 = \quad + 6ax^2$

$b^3 = \quad + x^3$

$12a^2x + 6ax + x^3$

$- \quad - \quad -$

0 ꝛc.

a)

a) Wenn wieder ein Rest vorhanden, folglich die $\sqrt[3]{}$ nicht ganz rational wäre, wird der Rest mit dem vorgesetzten $\sqrt[3]{}$ zur übrigen Wurzel geschrieben. Z. B. Wenn hier noch d z übrig wäre, so würde die $\sqrt[3]{} = 2a + x + y + \sqrt[3]{dz}$ seyn.

§. 79.

Aufg. Aus einer Zahl z. B. 22765187 die Kubikwurzel ausziehen.

Aufl. Man theilt 1) die Zahl wie §. 72. wieder in Klassen ein, doch so daß jede Klasse 3 Ziffer erhalte, weil der Würfel der höchsten einfachen Zahl mehr Ziffer nicht haben kann. 2) Nimmt man aus dem nächst kleinern Kubus die $\sqrt[3]{}$ hier $= 2$, und setzt sie rechterseits zur gegebenen Größe hin. Den Kubus $= 8$ dieser Wurzel, subtrahirt man von der ersten Klasse, und setzt zum Rest die zweyte herab. 3) Dividirt man mit $3a^2$, d. i. mit $3 \times 4 = 12$ um b zu bekommen (§. 10. b.) rückt aber mit dem Theiler $3a^2$ um ein Ziffer weiter, weil dieß unter den Hunderten $= 7$, seinen Anfang hat. Den Quotienten setzt man als den 2ten Theil b zu dem ersten Theil der Wurzel, und machet 4) $3a^2b + 3ab^2 + b^3$; setzt es aber so, daß von $3a^2b$ das niedrigste oder letzte Ziffer, hier 6, unter 7 des Restes; das letzte 4 von $3ab^2$, unter 6; das letzte 2 von b^3 unter 5 zu stehen komme (§. 75. c.)

5)

5) Sammelt man alles in eine Summe, zieht es vom obigen Reste ab, und setzt zum neuen Reste die 3te Klasse. 6) Jetzt sieht man die gefundene Wurzel 28 als den ersten Theil a an; macht $3\,a^2 = 784 \times 3 = 2352$, dividirt und verfährt wieder wie bisher. 7) Wenn die Wurzel nicht ganz rational ist, so setzt man dem letzten Rest und eben so auch den folgenden beynahe wie §. 73, immer drey Nullen zu: dividirt dann mit $3\,a^2$, und unterscheidet diese Quotienten als Dezimalen mit einem Scheidezeichen von der vorigen Wurzel.

	Kubus	Wurzel.
	22 | 765 | 187	283, 3 - - -
$a^2 =$	8	
I. Rest =	14765	
$: 3\,a^2 =$	(12)	
$3\,a^2\,b =$	96	
$3\,a\,b^2 =$	384	
$b^3 =$	512	
$3a^2b+3ab^2+b^3 =$	13952	
II. Rest =	813187	
$: 3\,a^2 =$	(2352)	
$3\,a^2\,b =$	7056	
$3\,a\,b^2 =$	756	
$b^3 =$	27	
$3a^2b+3ab^2+b^3 =$	713187	
	100000	

III.

III. Rest + 000 = 100000000
$3a^2 =$ (240267)
$:3a^2b =$ 720801
$3ab^2 =$ 7641
$b^3 =$ 27

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 72156537$ - - - -

a) Wenn etwa der Divisor $3a^2$ in den herabgesetzten I. II. oder III. Reste nicht enthalten wäre, so müßte wieder wie §. 72. a, zur Wurzel und zum Divisor 0 gesetzt, u. mit dem letzten um ein Ziffer fortgerückt, zuvor aber die folgende Klasse zum vorigen Reste herabgeschrieben werden.

b) Die $\sqrt[3]{}$ des nächst kleinern Würfels der ersten Klasse leichter zu finden, sind hier alle Würfel der einfachen Zahlen.

Wurzel.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Würfel.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

c) Aus den bisher vorgetragenen Lehren läßt sich leicht einsehen, daß die Ausziehung der Wurzeln nichts anders, als eine Art der Division sey, wo man den Divisor selbst finden muß.

§. 80.

Aufg. Man giebt das Quadrat, oder den Kubus einer Größe: es soll aber das Quadrat, oder der Kubus der nächst folgenden gefunden werden.

Aufl.

Aufl. Die Größe sey a, so ist die nächst folgende $a + 1$. Von dieser ist

I. das Quadr. $a^2 + 2a + 1$

II. der Kubus $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

D. i. Wenn man zum gegebenen Quadrate die doppelte Wurzel und 1; zum Kubus das dreyfache Quadrat des ersten Theils in den 2ten, den 3fachen 1ten Theil und 1 addirt: so erhält man im ersten Falle das Quadrat, im zweyten den Kubus der nächst folgenden Größe.

§. 81.

1) Wenn aus beyden Gliedern einer Gleichung die nämliche Wurzel ausgezogen wird, so bleibt der Werth der Gleichung unverändert (§. 6.) Und

a) Wenn daher aus einem Gliede einer Gleichung eine Wurzel ausgezogen wird, so muß sie auch aus dem andern ausgezogen werden.

§. 82.

Ist also die unbekannte Größe ein vollkommenes Quadrat, (man heißt es in diesem Falle eine reine quadratische Gleichung) so muß 1) die Würde x^2, x^3 nach §. 26 auf eine Seite gebracht, dann 2) aus beyden Gliedern die Wurzel ausgezogen werden. Z. B.

$$\frac{3x^2}{c} + b = a$$

$$\times c \qquad 3x^2 + bc = ac$$

$$-bc \qquad 3x^2 = ac - bc$$

$$:3 \qquad x^2 = \frac{ac - bc}{3}$$

$$\sqrt{\ } \qquad x = \sqrt{\frac{(ac - bc)}{3}}$$

§. 83.

Ist die Würde der unbekannten Größe ein unvollkommenes Quadrat, welches (§. 67. b.) geschieht, so oft dieselbe nebst ihrem Quadrate noch mit einer Größe multiplizirt ist: so ist 1) Die Gleichung, die man in diesem Falle eine unreine quadratische Gleichung (aequatio quadratica affecta) heißt, nach §. 26. zu reduziren, und so zu ordnen, daß das Quadrat der unbekannten Größe auf einer Seite der Gleichung, voran und positiv zu stehen komme. 2) Der Koeffizient von der Würde, (wenn sie einen hat) x^2 oder y^2 wegzuschaffen. 3) Der halbe Koeffizient von der Wurzel x aber (§. 67. b.) zu quadriren, und dieß Quadrat, damit die Gleichung nicht verändert werde, zu beyden Gliedern der Gleichung zu addiren. 4) Ueberall die $\surd$ auszuziehen, welche auf der einen Seite allemal = x ± des halben Koeffizienten ist. Z. B. Es sey gegeben

$$d = cx - \frac{ax^2}{b}$$

$+\frac{ax^2}{b}$ $$\frac{ax^2}{b} + d = cx$$

$-cx$, u. $-d$ $$\frac{ax^2}{b} - cx = -d$$

$\times b$ $$ax^2 - bcx = -bd$$

$$: a \qquad x^2 - \frac{bcx}{a} = - \frac{bd}{a}$$

$$\text{Kompl.} \qquad x^2 - \frac{bcx}{a} + \frac{b^2c^2}{4a^2} = \frac{b^2c^2}{4a^2} - \frac{bd}{a}$$

$$\sqrt{} \qquad x - \frac{bc}{2a} = \sqrt{\frac{b^2c^2}{4a^2} - \frac{bd}{a}}$$

$$+\frac{bc}{2a} \qquad x = \sqrt{\frac{b^2c^2}{4a^2} - \frac{bd}{a}} + \frac{bc}{2a}$$

Aufgaben für Gleichungen vom zweyten und dritten Grade.

§. 84.

1te Aufg. Als Titius gefragt wurde, was sein Pferd koste, das er gekauft hatte, gab er zur Antwort: das Pferd kostet 58 fl., und gerade so viel, als sein Alter 9mal und dessen Quadrat dreymal genommen, ausmachen, wenn man 4 dazu setzt. Wie alt war das Pferd?

Aufl. Wenn das Alter $= x$, so ist aus den Bedingnißen die Gleichung:

$$3x^2 + 9x + 4 = 58$$

$$-4 \text{ u. } : 3 \qquad x^2 + 3x = \frac{58-4}{3} = 18$$

$$\text{Kompl.} \qquad x^2 + 3x + \tfrac{9}{4} = 18 + \tfrac{9}{4} = \tfrac{81}{4}$$

$$\sqrt{} \qquad x + 1\tfrac{1}{2} = \sqrt{\tfrac{81}{4}} = \tfrac{9}{2} = 4\tfrac{1}{2}$$

$$-1\tfrac{1}{2} \qquad x = 4\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{2} = 3$$

Das Pferd war also 3 Jahre alt.

Probe $\qquad 3 \times 3^2 + 9 \times 3 + 4 = 58.$

Hie=

Hieher mögen wohl folgende Aufgaben gehören.

a) Die Hälfte einer Zahl mit ihrem Drittheile multiplizirt, macht 24: Wie groß ist die Zahl? Gleich.
$\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = 24$. Antw. 12.

b) Der Kubus einer Zahl mit dem 4ten Theile seiner Wurzel dividirt, giebt 100. Wie groß ist die Zahl? Gleich. $x^3 : \frac{x}{4} = 100$. Antw. 5.

c) Ein Kandidat der Mathematik kauft sich 3 mathematische Bücher. Eines kostet so viel als das andere: multiplizirt man sie aber in einander, so gehen nur 30 Kr. ab, daß sie nicht 1796850 Fl. 30 Kr. betragen. Was kostet jedes? Gleich.
$3\,x^3 + 30 = 1796850$ Fl. 30 Kr. Antw. 5 Fl. 30 Kr.

§. 85.

2te Aufg. Ein General wird gefragt, wie viel er unter seinem Regimente Hauptleute habe. Er antwortet: ein jeder Hauptmann hat noch so viel Unterhauptleute, als Hauptleute sind; ein jeder Unterhauptmann viermal so viel Soldaten, als Hauptleute: jedem Hauptmanne rechne er 9 Soldaten zu seiner Bedienung, welche den $\frac{1}{200}$ Theil von allen Soldaten mache. Wie viel sind von jedem?

Aufl. Hauptleute sind x: also Unterhauptleute $2\,x^2$, und alle Soldaten $8\,x^3$. Da jeder Hauptmann noch 9 Soldaten hat, so machen sie miteinander $9\,x$; und weil dieß $\frac{1}{200}$ vom ganzen Regimente $= 8\,x^3$, ist; so wird die Gleichung

$$9x = \frac{8x^3}{200} = \frac{x^3}{25}$$

: x, u. × 25. $$225 = x^2$$

√ $$15 = x.$$

a) Ein Feld von 69696 soll in ein Viereck verändert werden. Wie lang muß es seyn? Gleich.

$$x^2 = 69696.$ Antw. 264.

b) Ein viereckichter Kasten hält 1331 Kubikfüße. Wie tief ist er? Gleich.

$x^3 = 1331.$ Antw. 11.

c) Einige Studenten haben mit einander 5 Fl. 24 Kr. verzehrt. Es zeigt sich aber, daß jeder so viel bezahlen müße, als ihrer Studenten waren. Wie viel waren Studenten? Gleich.

$x^2 = 5$ Fl. 24 Kr. $= 324$ Kr. Antw. 18. Stud.

d) Ein Gärtner soll mit einer Anzahl Bäume ein Viereck anlegen: und da bleiben ihm 20 Bäume übrig. Nun verlängert er jede Reihe um einen Baum, und es gehen ihm noch 101 Baum ab. Wie viel hat er Bäume? Gleich.

$x^2 + 20 = (x + 1)^2 - 101.$ Antw. 3620.

§. 86.

3te Aufg. Die Summe zwoer Größen ist $= 8$: die Summe ihrer Quadrate aber $= 40$. Wie viel betragen die Größen?

Aufl. Es sey die kleinere $= x$, die größere $= y$, so ist

$$\text{I.}\quad x + y = 8 \} x = 8 - y$$

$$\text{II.}\quad x^2 + y^2 = 40$$

also nach II. $\quad 64 - 16y + y^2 + y^2 = 40$

$-64 \quad 2y^2 - 16y = 40 - 64 = -24$

$:2 \quad y^2 - 8y = -12$

nach §. 83. 3 $\quad y^2 - 8y + 16 = -12 + 16 = 4$

$\sqrt{}$ §. 83. 4. $\quad y - 4 = \sqrt{4} = 2$

$+4 \quad y = 2 + 4 = 6$

folglich $\quad x = 2$

Probe: nach I. ist $6 + 2 = 8$

II. $\quad 36 + 4 = 40$

a) Eben so lassen sich aus gegebener Summe und Produkte zwoer Größen, die Größen selbst finden. Denn es seyen die Größen x, y die Summe $= a$, das Produkt $= b$: so ist

$$x + y = a \} x = a - y$$

$$xy = b \quad \}$$

also $\quad ay - y^2 = b$

§. 83. 1. $\quad y^2 - ay = -b$

Kompl. $\quad y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = -b + \frac{a^2}{4}$

$\sqrt{} \quad y - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$

$+\frac{a}{2} \quad y = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} + \frac{a}{2}$

Es sey also $a = 8$. $b = 12$, so ist $y = \sqrt{\frac{64}{4} - 12} + \frac{8}{2}$; Unter einer Benennung nach §. 41, ist $\sqrt{\frac{64}{4} - \frac{48}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \frac{4}{2}$ (§. 52. a.) $= 2$. Nun

$\frac{a}{2}$ addirt, wird $y = 2 + \frac{8}{2} = 6$: also x nach der Nebengleichung $= 8 - 6 = 2$.

b) 40 soll in zween Faktorn getheilt werden, wovon der eine um 3 größer ist als der andere. Wie groß sind die Faktorn? Einer ist x, der andere $x + 3$; also die Gleich.

$$x^2 + 3x = 40$$
$$x^2 + 3x + \tfrac{9}{4} = 40 + \tfrac{9}{4} = \tfrac{169}{4}.$$

Antw. Einer ist 8, der andere 5.

Anmerk. Ein Binomium aus einem Ganzen und einem Bruche wird am bequemsten quadrirt, wenn alles zu einem Bruche gemacht, und Zähler und Nenner quadrirt wird. So ist hier $(1 + \frac{1}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

§. 87.

4te Aufg. Die Summe zwoer Größen x und y ist dem Produkte derselben, und dieß auch der Differenz ihrer Quadrate gleich: man sucht die Größen selbst.

Aufl. Es ist I. $x + y = xy$

II. $= x^2 - y^2 = (x+y) \times (x-y)$

folglich $x + y = (x+y) \times (x-y)$.

: x, + y III. $1 = x - y$ und $x = 1 + y$

für x 1 + y subst. $1 + 2y = y + y^2$. Daher $y^2 - y = 1$.

Kompl. $y^2 - y + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$y - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$

Daher $+\frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

und nach III. $x = 1 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Pro=

Probe $x+y=2\pm\sqrt{5}$

$=xy=(\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{5})\times(\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{5})$

$=\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{25}\pm\sqrt{5}=\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{4}\pm\sqrt{5}=2\pm\sqrt{5}$

$=x^2-y^2=(\tfrac{9}{4}\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{5}+\tfrac{5}{4})-(\tfrac{1}{4}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{5}+\tfrac{5}{4})$

$=(\tfrac{7}{2}\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{5})-(\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{5})=2\pm\sqrt{5}$.

a) Soll die Differenz zwoer Größen x und y ihrem Produkte, und dieß auch der Summe ihrer Quadrate gleich seyn, so verfährt man also:

I. $x-y=xy$
$=x^2+y^2$

Folgl.	II.	$x^2+y^2=xy$
beyders. $-2xy$		$x^2-2xy+y^2=-xy$
$\sqrt{}$		$x-y=\pm\sqrt{-xy}$
Für $x-y$ in I. subst. xy		$xy=\pm\sqrt{-xy}$
Quadr.		$x^2y^2=-xy$ (§. 55. a.)
$:xy$	III.	$xy=-1$
$:x$	IV.	$y=-\tfrac{1}{x}$ und $-y=\tfrac{1}{x}$.
Also nach IV.		$x-y=x+\tfrac{1}{x}$
Unter ein. Nen.		$=\dfrac{x^2+1}{x}$
Nach I.		$=xy$
Nach III.		$=-1$
Folglich		$x-y=-1$
$\times x$ (IV. $\tfrac{1}{x}$ statt $-y$)		$x^2+1=-x$
-1 u. $+x$		$x^2+x=-1$
Kompl.		$x^2+x+\tfrac{1}{4}=-1+\tfrac{1}{4}=-\tfrac{3}{4}$
$\sqrt{}$		$x+\tfrac{1}{2}=\pm\sqrt{-\tfrac{3}{4}}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$
$-\tfrac{1}{2}$		$x=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{-\tfrac{3}{4}}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$

Nach I. u. III. $x-y=-1$ und $x+1=y$

Folglich $y=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}+1=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$

Probe. $x-y=\frac{-1\pm\sqrt{-3}-1\pm\sqrt{-3}}{2}=-\frac{2}{2}$

$=xy=\left(-\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)\times\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=-$
$\frac{4}{4}$ (§. 54. a.) $=-1$

$=x^2+y^2=\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)^2$
$=-\frac{2}{2}=-1.$

Folglich $x-y=xy=x^2+y^2$. Doch ist so eine Größe unmöglich, weil (§.57.2.) $\sqrt{-3}$ unmöglich ist.

Anmerk. Wenn hier $x-y=1$, und wenn $x^2-y^2=xy$, so wird auch $x^2-xy=y^2=(x-y)\times x=y^2$. Nun statt $x-y$, 1 gesetzt, wird $x=y^2$ d. i. die größere Zahl gleichet dem Quadrate der kleineren.

b) Es sey $y+\sqrt{x}=a$; $x+cy=b$

so ist I. $y+\sqrt{x}=a$ $\}x=\overline{a-y}^2=a^2-2ay+y^2$
$x+cy=b$ $\}x=b-cy$

Folgl. $a^2-2ay+y^2=b-cy$

$+2ay$ u. $-a^2$ $y^2=2ay-cy+b-a^2=(2a-c)\times y+b-a^2$

Wenn nun $2a-c=p$, $b-a^2=q$, so ist

$y^2=py+q$, und $y^2-py=q$

Kompl. $y^2-py+\frac{1}{4}p^2=q+\frac{1}{4}p^2$

$\sqrt{}$ $y-\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$

$+\frac{1}{2}p$ $y=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$

für

für p wieder $2a - c$, für q, $b - a^2$ hergestellt, wird

$$y = \frac{2a - c}{2} \pm \sqrt{\frac{4a^2 - 4ac + c^2}{4} + b - a^2}$$

$$= \frac{2a - c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4ac + 4b}{4}}$$

$$\times c \quad cy = \frac{2ac - c^2}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 + 4b - 4ac}{4}} \times c$$

$$x = b - cy.\ x = b + \frac{c^2 - 2ac}{2} \mp \sqrt{\frac{c^2 + 4b - 4ac}{4}} \times c$$

Anmerk. Nebst den §. 35 angezeigten Schriftstellern können hier noch mit Nutzen gelesen werden: Schirmers selbstlehrende Algebra, 1te, 2te und 3te Abtheilung: Hellwigs Anfangsgründe der allgemeinen Mathematik und Arithmetik: Spohrs Anfangsgründe der Algebra: P. Ign. Pickel Elem. Alg. et Geom. Tom. I. Vorzüglich aber Kästners Analysis endlicher Größen.

IV. Abschnitt.

Von dem binomischen Lehrsatze in Absicht auf die höhern Würden, von den Versetzungen und Verbindungen.

§. 88.

Wenn der Kubus einer zweytheiligen Wurzel $(a \pm b)$ nochmal mit der Wurzel multiplizirt wird, so entstehet die 4te Würde: diese wieder mit $(a \pm b)$ multiplizirt, giebt die 5te u. s. w. Die Würden werden also aussehen;

I. $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

II. $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$

III. $(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$

§. 89.

1) Alle Glieder was immer für einer Würde von $(a + b)$, sind also beiahend: von $(a - b)$ aber sind es nur die ersten, dritten, 5ten Glieder 2c. die 2ten, 4ten, 6ten sind verneinend (67. u. 75.)

2) Die Exponenten des ersten Theils a, nehmen in natürlicher Ordnung immer ab, und werden in III. a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, a^0 (denn nach §. 50 ist $a^0 b^6 = 1 b^6 = b^6$) die Exponenten des zweyten Theils b aber fangen von o an, und wachsen in der natürlichen Zahlenordnung bis auf 6 fort: b^0, b^1, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6.

3) Die Koeffizienten gleichen den Produkten der von dem höchsten Exponenten des ersten Theils a an, in natürlicher Ordnung abnehmenden Zahlen, durch die Produkte der in natürlicher Ordnung von 1 an, zunehmenden Zahlen getheilt. So sind in III. die Koeffizienten 6. 15, 20, 15, 6, $1 = \frac{6}{1}$, $\frac{6 \times 5}{1 \times 2}$, $\frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3}$, $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$, $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$, $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$.

§. 90.

§. 90.

Wird nun der erste Exponent von $a = m$ gemacht, so nehmen 1) die Exponenten des ersten Theils also ab: m, $m-1$, $m-2$, $m-3$ ꝛc.

2) Die Koeffizienten aber sind (vorherg. §. 3.) $\frac{m}{1}$, $\frac{m\times(m-1)}{1\times 2}$, $\frac{m\times(m-1)\times(m-2)}{1\times 2\times 3}$, $\frac{m\times(m-1)\times(m-2)\times(m-3)}{1\times 2\times 3\times 4}$ ꝛc.

3) Daher dann diese allgemeine Formel für alle möglichen Würden entsteht:

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m\times(m-1)}{1\times 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m\times m-1\times m-2}{1\times 2\times 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m\times(m-1)\times(m-2)\times(m-3)}{1\times 2\times 3\times 4} a^{m-4} b^4 - - -$$

§. 91.

1) Nach §. 51. ist $a^{m-1} = \frac{a^m}{a^1}$. $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$: also $a^{m-1} b = \frac{a^m b}{a}$. $a^{m-2} b^2 = \frac{a^m b^2}{a^2}$. Auch ist $\frac{a^m b}{a} = a^m \frac{b}{a}$ und $\frac{a^m b^2}{a^2} = a^m \frac{b^2}{a^2}$: Es verwandelt sich also die obige allgemeine Formel in folgende:

$$a^m + m a^m \frac{b}{a} + \frac{m\times(m-1)}{1\times 2} a^m \frac{b^2}{a^2} + \frac{m\times(m-1)\times(m-2)}{1\times 2\times 3} a^m \frac{b^3}{a^3} + \frac{m\times(m-1)\times(m-2)\times(m-3)}{1\times 2\times 3\times 4} a^m \frac{b^4}{a^4} - - -$$

2) Wenn wir aber diese Formel etwas genauer betrachten, so zeigt sich, daß das erste Glied a^m nur im zweyten noch mit m, und $\frac{b}{a}$ multiplizirt sey d. i.

das erste Glied ist im zweyten, und so das zweyte im 3ten, das dritte im 4ten u. s. w. enthalten. Wird also das erste = A, das zweyte = B, das dritte = C; $\frac{b}{a} = q$, gesetzt; so entstehet endlich diese bequemere Formel:

$$a^m + m A q + \frac{m-1}{2} B q + \frac{m-2}{3} C q + \frac{m-3}{4} D q - - -$$

a) Nach dieser letzten, oder auch nach der ersten Formel können alle komplexe Größen zu jeder beliebigen Potenz erhoben, und weil alle Wurzelgrößen in Würden gebrochener Exponenten verwandelt werden können, (§. 52.)

b) Auch alle Wurzeln ausgezogen werden. Folgende Aufgaben sollen für Beyspiele dienen.

§. 92.

1te Aufg. $2ax + y^2$ zur dritten Würde zu erheben.

Aufl. Nach der letzen Formel sey $2ax = a$, $y^2 = b$, so ist $\frac{y^2}{2ax} = q$, und $m = 3$. Folglich

$$(2ax + y^2)^3 = 8a^3x^3 + 3 \times 8a^3x^3 \frac{y^2}{2ax} + 12a^2x^2y^2 \frac{y^2}{2ax} + 2axy^4 \frac{y^2}{2ax} = 8a^3x^3 + 12a^2x^2y^2 + 6axy^4 + y^6.$$

2te Aufg. Aus $(a^2 - x^2)$ die Quadratwurzel ausziehen.

Aufl.

Aufl. Weil $\sqrt{(a^2 - x^2)} = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, so sey wieder $a^2 = a$; $-x^2 = b$; $-\frac{x^2}{a^2} = q$; $\frac{1}{2} = m$. so wird nach der Vorschrift der Formel

$$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a + \tfrac{1}{2}\,a \times -\frac{x^2}{a^2} + \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} \times -\frac{x^2}{2a} \times -\frac{x^2}{a^2} + \frac{\frac{1}{2} - 2}{3} \times -\frac{x^4}{8\,a^3} \times -\frac{x^2}{a^2} \ldots$$

$$= a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5\,a^8}{128\,a^7} \ldots$$

3te Aufg. Die $\sqrt{}$ aus $(a\,x - x^2)$ finden.

Aufl. $\sqrt{(a\,x - x^2)} = (a\,x - x^2)^{\frac{1}{2}}$, also ist $a\,x = a$; $-x^2 = b$; $-\frac{x^2}{a\,x} = q$; $\frac{1}{2} = m$ und

$$(a\,x - x^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\,a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8\,a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16\,a^{\frac{5}{2}}} \ldots$$

4te Aufg. Die $\sqrt{}$ aus $(1 - y^2)^{-1}$ suchen.

Aufl. $\sqrt{(1 - y^2)^{-1}} = (1 - y^2)^{\frac{-1}{2}}$ folglich in der Formel (§. 91. 2.) $1 = a$; $-y^2 = b$; $-y^2 = q$; $-\frac{1}{2} = m$. und

$$(1 - y)^{\frac{-1}{2}} = 1\ (\S.51.) + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{3}{8}y^4 + \tfrac{5}{16}y^6 + \tfrac{85}{128}y^8 \ldots$$

a) Fernere Beyspiele zur Uebung können seyn: I. $\sqrt{(a^2 + x^2)}$ II. $\sqrt{(2x - x^2)}$ III. $\sqrt{(p^2 + 4y^2)}$ IV. $\sqrt[3]{(a^2 + y^2)}$. V. $\sqrt{(4x^2 + y)}$.

An-

Anmerk. Wir werden von den meisten hieoben angeführten Beyspielen besonders in der Differential- und Integralrechnung Gebrauch machen. Und da die Verwandlung der Brüche (deren Nenner komplexe Größen sind), in unendliche Reihen, (§. 44.) in jenen beyden Rechnungsarten, von eben so großer Wichtigkeit ist, und nun nach verstandener Würdenlehre weit leichter verrichtet wird: so habe ich auch hier noch einige, doch meist brauchbare Beyspiele von Brüchen dieser Art hersetzen wollen. Es seyen also zu theilen

$$\text{I. } \frac{a^2}{b+x}. \quad \text{II. } \frac{1}{1+t^2}. \quad \text{III. } \frac{a^2}{a^2+t^2}. \quad \text{IV. } \frac{ay}{b+y}. \quad \text{V. } \frac{1}{1-a+a^2}.$$

§. 93.

1) Die verschiedene Ordnung, nach welcher mehrere Dinge zusammengesetzt werden können, heißt eine Permutation, oder Versetzung (Permutatio).

2) Eine jede gegebene Anzahl der Dinge kann so oft versetzt werden, als das Produkt der von 1 an, in natürlicher Ordnung bis auf die gegebene Anzahl fortgehenden Zahlen ist. D. i. drey Dinge lassen sich $1 \times 2 \times 3$ mal: vier Dinge $1 \times 2 \times 3 \times 4$ mal versetzen.

Denn es seyen zwey Dinge a und b, so giebt es nur zwo Versetzungen a b, und b a: die Zahl der Versetzungen ist also $= 1 \times 2$. Kömmt nun ein drittes c dazu, so kann es dreymal mit a b, und dreymal mit b a zusammengesetzt werden d. i. vornen, mitten und hinten stehen, oder es wird

I. c a b, a c b, a b c
II. c b a, b c a, b a c.

Die

Die Zahl der Versetzungen ist also = 1 × 2 × 3.

Bey jeder dieser Versetzungen kann jetzt ein viertes d viererley Stellen haben: die erste, zweyte, dritte und vierte d. i. die Zusammensetzungen können seyn:

I. d c a b, c d a b, c a d b, c a b d
II. d a c b, a d c b, a c d b, a c b d
III. d a b c, a d b c, a b d c, a b c d
IV. d c b a, c d b a, c b d a, c b a d
V. d b c a, b d c a, b c d a, b c a d
VI. d b a c, b d a c, b a d c, b a c d.

Folglich ist hier die Zahl der Versetzungen = 4 × 6 = 1 × 2 × 3 × 4: und da dieß eben sofort von 5, 6, und jeder gegebenen Anzahl der Dinge wahr ist, so hat der Satz allerdings seine Richtigkeit.

a) Weil 1×2×3×4=4×3×2×1: so kann das Permutationsgesetz, wenn eine jede angebliche Anzahl der Dinge = n, also allgemein ausgedrückt werden.
$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times (n - 4)$ ---

b) Sechs Dinge können also schon 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 = 720mal versetzt werden. Zwölf Personen können so oft an einer Tafel beysammen sitzen, daß wenn sie auch alle Tage zweymal zu Gast geladen würden, doch keiner die Zeit erleben würde, zu der er wieder seinen ersten Platz in der Ordnung, in der er ihn anfangs hatte, erhalten würde. Die vier und zwanzig Buchstaben des Alphabets können so oft versetzt werden, als diese Zahl ist:
620448401733239439360000.

§. 94.

§. 94.

1) Soll nur eine gewisse Zahl der Dinge, oder Buchstaben d. i. zwey und zwey, drey und drey rc. also zusammengesetzt werden, daß in keiner dergleichen Zusammensetzungen der nämliche Buchstab mehr als einmal vorkomme, so heißt dieß eigentlich eine Verbindung (Kombination). a b, und b a sind nur eine Kombination. Diese Art der Versetzung ist eine Bination, wenn nur zwey; eine Trination, wenn drey Dinge mit einander so zusammengesetzet werden sollen u. s. w. 2) Wenn die Zahl der Binationen aus einer n Menge von Dingen = B; der Trinationen = T; der Kombinationen überhaupt = x, so ist

$$\text{I. } B = \frac{n \times (n-1)}{1 \times 2}$$

$$\text{II. } T = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

$$\text{III. } x = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times --m}$$

Wo in III. die Theiler $1 \times 2 \times 3 \times --- m$, den Namen der Kombinationen anzeigen.

Denn I. bey jeder Bination kann jeder Buchstab so oft mit andern verbunden oder binirt werden, als Buchstaben vorhanden sind, sich selbst ausgenommen, d. i. $n - 1$mal ∴ alle Buchstaben also werden eine Menge von Buchstaben $= n \times n - 1$ geben. Ferner bestehet jede Bination aus zween Buchstaben: wenn also die Zahl der Binationen = B ist, so muß die Zahl der Buchstaben, aus denen sie bestehet, und welche oben $= n \times n - 1$ ist, hier = 2 B seyn: also ist

$$2\,B = n \times (n - 1)$$

$$B = \frac{n \times (n-1)}{2} = \frac{n \times (n-1)}{1 \times 2}$$

II. Soll nun eine Trination entstehen, so müßen jede zween Buchstaben einer Bination mit allen, ausge=

nommen mit sich selbst, d. i. $n - 2$mal verbunden werden: also ist die ganze Zahl der vorhandenen Buchstaben $= \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2}$. Eben diese ist auch $= 3\,T$, weil zu jeder Trination deren Zahl $= T$ ist, drey Buchstaben vonnöthen sind: folglich wird wieder

$$3\,T = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2}$$

$$T = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

Eben so ist III. die Zahl der Quadrinationen $= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ u. s. w. Folglich überhaupt für alle Kombinationen

$$x = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times} \text{-----} m$$

a) Eben diese Anzahl der Kombinationen gleichet also dem Produkte der von der gegebenen Menge n an in natürlicher Ordnung abnehmenden Zahlen, durch das Produkt der von 1 an, bis auf die Zahl, welche die Kombination ausdrückt, in natürlicher Ordnung fortwachsenden, getheilt.

b) Jede Kombination ist nichts anders als ein Produkt aus verschiedenen Faktorn oder Koeffizienten: und es erhellet also, daß diese Kombinationsformel mit der Bestimmung der Koeffizienten (§. 89. 3.) auf's genaueste übereinstimme. Hr. Euler in seiner vollst. Anl. zur Algebra im II. Abschn. II. Kap. Spohr in den Anfangsgr. der Algebra und andere leiten deßwegen die Koeffizienten für das neutonische Binomium aus der Kombinationslehre her, und mögen darüber nachgelesen werden.

b) Aus den 24 Buchstaben des Alphabets können so viel Worte von sechs Buchstaben entstehen, als $\frac{24}{1}\times\frac{23}{2}\times\frac{22}{3}\times\frac{21}{4}\times\frac{20}{5}\times\frac{19}{6}$ giebt. Eben so läßt sich finden, wie oft aus den 32 Blättern eines Kartenspiels 7 genommen werden können: wo sich dann zeigt, daß unter 21 Fällen noch kaum einer ist, wobey man sichere Hoffnung zu gewinnen hat.

Anmerk. Die in diesen zween §. §. vorgetragenen Lehren sind allerdings, vorzüglich in Absicht auf die Physik, einer ganz besondern Aufmerksamkeit würdig. Wir lernen daraus, wie die Natur oft aus einem geringen Stoffe blos durch die Versetzungen, so reich, und so fruchtbar in ihren Wirkungen seyn könne: wie so viele bunte Schönheiten aus den 7 Hauptfarben, so manigfaltige Harmonien aus 7 Tönen entstehen können. Daher können wir die Gründe angeben, warum nicht zwey Blätter am nämlichen Aste, nicht zwo Pflanzen, nicht zwey Thiere von der nämlichen Art ꝛc. nicht einmal die Gesichtsbildungen zweener Menschen vollkommen einander gleich gefunden werden: woher der Unterschied der Körper, und selbst schon ihrer Grundtheile, an Gestalt, Dichtigkeit, und an der Aeußerung ihrer Kräfte ꝛc. komme; wenn auch die ersten Elemente, eben so, wie die Einheiten der Zahlen, vollkommen einander gleich seyn sollten. Wer nur bedenkt, daß aus der Einheit die 9 Grundzahlen, und aus diesen alle möglichen Zahlen, blos durch Versetzungen und Kombinationen entstehen, dem wird es überhaupt leicht seyn, die erstaunliche Manigfaltigkeit natürlicher Dinge zu begreiffen. Hr. Hofrath Kästner wendet die Kombinationen auf die Spiele und die logischen Schlußarten an.

2te Anmerk. Die Behandlung unbestimmter und höherer Gleichungen, wird füglicher weiter unten vorkommen.

Drit=

Drittes Hauptstück.

Von den Verhältnißen, Proportionen, Progreßionen und Logarithmen.

I. Abschnitt.

§. 95.

Von den Verhältnißen.

Die Vergleichung zwoer ungleichen Größen der nämlichen Art, nach ihrem Unterschiede, heißt ein arithmetisches (ratio arithmetica) nach ihrem Innhalte ein geometrisches Verhältniß (ratio geometrica) 5 — 3. ist ein arithmetisches Verhältniß (man drückt es auch so aus: 5 . 3) und 2 heißt der Unterschied, oder die Differenz. 8 : 2 ist ein geometrisches Verhältniß, und der Quotient = 4, wird auch der Exponent des Verhältnisses (exponens rationis) genennt.

a) Es werden daher zu jedem Verhältnisse zwey Glieder erfodert, ein Voderglied (antecedens) und ein Hinterglied (consequens).

b) Das Verhältniß ist wachsend (ratio crescens) wenn das Voderglied kleiner ist, als das Hinterglied: abnehmend (ratio decrescens) wenn es größer ist. 3 . 5 oder 3 : 6 sind wachsende: 5 . 3 und 6 : 3, abnehmende Verhältnisse.

c) Es ist für sich selbst einleuchtend, daß man bey den arithmetischen Verhältnissen subtrahiren; bey den geometrischen dividiren müsse. Darum ist auch ein jedes geometrisches Verhältniß einem Bruche gleich, dessen Nenner das Voderglied, der Zähler aber das Hinterglied ist. $\frac{5}{8} = 8 : 5$.

§. 96.

1) In dem wachsenden arithmetischen Verhältniße $3 . 5$ ist $5 = 3 + 2$; in dem fallenden $5 . 3$ ist $3 = 5 - 2$. Es ist aber 2 die Differenz des 2ten Glieds vom ersten; daher ist in einem arithmetischen Verhältnisse überhaupt, das zweyte Glied, gleich dem ersten mehr oder weniger der Differenz. (vorhergehenden §. b.)

2) Wenn also das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, so ist $a . a \pm d$, ein allgemeiner Ausdruck für alle arithmetische Verhältnisse, weil a alle möglichen ersten Glieder; d aber alle möglichen Differenzen anzeigen kann.

§. 97.

1) In dem wachsenden geometrischen Verhältnisse $3 : 6$, ist $6 = 3 \times 2$; in dem fallenden $6 : 3$, ist $3 = \frac{6}{2}$. Es ist aber 3 der Quotient, oder Exponent des Verhältnisses: in einem jeden geometrischen Verhältnisse ist also das zweyte Glied, gleich dem ersten mit dem Exponenten des Verhältnisses multiplizirt oder dividirt

2) Wenn daher das erste Glied = a, der Exponent = q, so ist a : a q ein allgemeiner Ausdruck für alle geometrischen Verhältnisse: denn a kann alle möglichen ersten Glieder, q alle möglichen Exponenten, mit denen a multiplizirt, oder dividirt ist, anzeigen.

a) Wenn also das erste Glied eines Verhältnisses nebst der Differenz oder dem Exponenten gegeben ist, so weis man auch das zweyte Glied.

b) Es ist ein Unterschied zwischen dem Exponenten einer Würde, und dem Exponenten eines Verhältnisses. Dieser ist nichts als ein Quotient; jener aber der Grad der Würde, zu welcher eine Größe erhoben ist. Sie sind daher wohl zu unterscheiden.

§. 98.

1) Die Vergleichung zweyer Verhältnisse nach ihrem Unterschiede oder nach ihrem Innhalte, giebt eine Proportion; und im ersten Falle zwar eine arithmetische (Proportio arithmetica) im zweyten eine geometrische Proportion (Proportio geometrica).

2) Wenn zwey Verhältnisse die nämliche Differenz haben, so machen sie eine arithmetische Proportion, die man also ausdrückt: 3 . 5 = 7 . 9. Wo 2, beyderseyts die nämliche Differenz ist.

3) Haben zwey geometrische Verhältnisse den nämlichen Exponenten, so entsteht eine geometrische Proportion. Der Ausdruck ist, 3 : 6 = 4 : 8, und 2 ist beyderseits der nämliche Exponent.

4) Sind alle Glieder der Proportion verschieden, so heißt die Proportion unstettig (discreta) wie in den angeführten Beyspielen; sind aber die mittlern zwey Glieder einander gleich, so heißt sie stettig (Proportio continua). Z. B. 3 . 5 = 5 . 7. 3 : 6 = 6 : 12. Man drückt sie daher gleich also aus: 3 . 5 . 7. 3 : 6 : 12. D. i. man sagt: drey verhält sich zu fünf, wie das nämliche fünf zu 7, arithmetisch: 3 verhält sich zu 6, wie das nämliche 6 zu 12, geometrisch.

a) Eine jede unstettige Proportion muß also vier Glieder haben, zwey Vorderglieder und zwey Hinterglieder: eine stettige aber nur drey; und im letzten Falle ist das mittlere, (wie 6, in dem letzten Beyspiele) zugleich das Hinterglied des ersten, und das Vorderglied des zweyten Verhältnisses.

b) Die Proportion ist wachsend, wenn die beyden Vorderglieder kleiner: fallend, wenn sie größer sind, als die Hinterglieder. Z. B. 3 : 6 = 5 : 10, ist wachsend. 6 : 3 = 10 : 5, ist fallend.

§. 99.

Eine Proportion, in welcher beyde Verhältnisse wachsen, oder fallen, heißt eine gerade (Proportio directa) die, wovon ein Verhältniß wachsend, das andere fallend ist, eine verkehrte Proportion (Proportio reciproca, inuersa) 3 : 6 = 8 : 4 . 10 : 5 = 7 : 14, sind verkehrte Proportionen. Man sagt daher auch: eine jede Größe a, habe mit einer andern b ein verkehr=

kehrtes Verhältniß, wenn man weis, daß b abnehme, wenn a wächst, und umgekehrt. So hat das Gewicht des Brodes mit dem Werthe des Getraides; die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers, mit der Zeit, die er braucht ꝛc. ein verkehrtes Verhältniß.

a) Eine verkehrte Proportion wird in eine gerade verändert, wenn nur das erste, oder letzte Verhältniß umgekehrt wird. $3 : 6 = 8 : 4$ wird gerade, wenn ich setze $3 : 6 = 4 : 8$.

b) Weil sich ein Bruch gerade wie sein Zähler, verkehrt wie sein Nenner verhält (§. 38. b.) so hat er ein doppeltes Verhältniß: ein gerades im Zähler, ein verkehrtes aber im Nenner.

c) Eben deßwegen kann ein jedes verkehrtes Verhältniß bruchweise ausgedrückt werden: und so verwandelt sich die Proportion $3 : 6 = 8 : 4$ in diese $3 : 6 = \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$, die wieder gerade ist: Die Gleichheit dieser Proportion mit dem ersten zeigt sich vollkommen, wenn $\frac{1}{4} : \frac{1}{8}$, unter einerley Benennung gebracht, und die gleichen Nenner weggelassen werden. Denn hernach ist $\frac{1}{4} : \frac{1}{8} = \frac{8}{32} : \frac{4}{32} = 8 : 4$. Welches in der letzten Proportion für $\frac{1}{4} : \frac{1}{8}$ gesetzt, wieder $3 : 6 = 8 : 4$, giebt.

Anmerk. Was in diesem §. von den verkehrten Verhältnissen und Proportionen bisher gesagt wurde, ist nur von den geometrischen zu verstehen. Die weitern Eintheilungen derselben, wie auch ihr Gebrauch u. a. werden weiter unten mit Gelegenheit vorkommen.

§. 100.

Wenn nebst den Benennungen des §. 94. 2. das 3te Glied $= b$ ist, so ist

$$\begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\ 1)\ a & . & a \pm d = b & . & b \pm d \end{array}$$

eine allgemeine Formel für alle arithmetische unstettige Proportionen.

$$\begin{array}{ccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} \\ 2)\ a & . & a \pm d & . & a \pm 2d \end{array}$$

für alle stettige.

Das erste ist einleuchtend, weil in beyden Verhältnissen die nämliche Differenz ist. Sie ist es aber auch in der 2ten Formel: denn das dritte Glied ist ja um die nämliche Differenz größer oder kleiner, als das vierte, um welche das zweyte größer, oder kleiner, als das erste ist.

§. 101.

1) In einer arithmetischen unstettigen Proportion ist daher die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittleren: denn wenn man in der 1ten Formel die äußern und mittleren Glieder addirt, so ist

$$\text{I.} \quad \text{IV.} = \text{II.} + \text{III.}$$
$$a + b \pm d = a + b \pm d.$$

2) In einer stettigen aber ist die Summe der äußern Glieder gleich dem doppelten mittleren. Denn in der 2ten Formel (§. 100. 2.) ist wieder

I.

$$I. + III. = II. + II.$$
$$a + a \pm 2d = 2a \pm 2d.$$

a) Es wird daher ein jedes fehlende Glied, in was immer für einer arithmetischen Proportion gefunden, wenn man dasselbe x nennt, die äußern und mittlern addirt, oder das mittlere verdoppelt, wenn die Proportion stettig ist, dann x nach den Regeln des §. 26, wie bey andern algebraischen Aufgaben sucht, und die gefundene Größe an den Platz der fehlenden x setzt.

§. 102.

1te Aufg. Zu a, b, c, die 4te arithmetische Proportionalgröße finden.

Aufl. $a . b = c . x$

also $x + a = b + c$

und $x = b + c - a$

Wird nun $b + c - a$ statt x gesetzt, so ist $b + c - a$, die gesuchte vierte Proportional d. i.

$$a . b = c . b + c - a.$$

Denn wenn man die äußern und mittleren Glieder dieser Proportion addirt, so ist

$$a + b + c - a = b + c,$$

welches zugleich die Probe ist.

a) Eben so wird zu den gegebenen Zahlen z. B. 3, 9, 22, die vierte arithmetische Proportional gefunden, es mag hernach das erste, zweyte, dritte oder vierte Glied verlanget werden. So ist

I.	$3 \cdot 9 = 22 \cdot x = 28$
II.	$3 \cdot 9 = x \cdot 22 \cdot x = 16$
III.	$3 \cdot x = 9 \cdot 22 \cdot x = 16$
IV.	$x \cdot 3 = 9 \cdot 22 \cdot x = -10$

b) Den Beweis oder die Probe giebt wieder die Gleichheit der Summe der äußern Glieder, mit der Summe der mittleren, oder die in beyden Verhältnissen gleiche Differenz. Man könnte daher auch die verlangte Proportional dadurch finden, wenn man die Differenz des bekannten Verhältnisses z. B. in I. $9 - 3 = 6$ zum 3ten Gliede addirte, oder dieselbe wie im IV. $22 - 9 = 13$ davon subtrahirte, wo im I. $22 + 6 = 28$, als das letzte; im IV. $3 - 13 = - 10$ als das erste Glied herauskömmt.

§. 103.

2te Aufg. Zu a und b, 1) die mittlere, 2) die dritte Proportionalgröße finden.

Aufl. des 1) $a \,.\, x \,.\, b$ (§. 100. 2.)

§. 101. 2. $\quad 2x = a + b$

: 2 $\quad x = \frac{a + b}{2}$

Folgl. $\quad a \,.\, \frac{a+b}{2} \,.\, b$

Probe nach §. 101. 2. ist $a + b = \frac{2a + 2b}{2}$.

Aufl.

Aufl. des 2ten nach §. 101. 2. ist

$$a \,.\, b \,.\, x$$

$$x + a = 2\,b$$

$- a$ $\quad x = 2\,b - a$

Folgl. $\quad a \,.\, b \,.\, 2\,b - a$

Probe $\quad a + 2\,b - a = 2\,b.$

a) Auf gleiche Weise ist

I. $8 \,.\, x \,.\, 11$ und $x = 9\frac{1}{2}$

II. $8 \quad 11 \,.\, x$ $\quad x = 14$

III. $x \,.\, 8 \,.\, 4$ $\quad x = 12.$

Die Probe giebt sich wieder von sich selbst, wenn man, wie in den obigen Beyspielen verfährt.

§. 104.

Wenn in einer geometrischen Proportion das 3te Glied = b (§. 97. 2.) so ist

I. II. III. IV.

1) $a : a\,q = b : b\,q$

ein allgemeiner Ausdruck für alle unstettige geometrische Proportionen.

I. II. III.

2) $a : a\,q : a\,q^2$

für alle stettige.

Denn in der ersten Formel ist b im 4ten Gliede mit dem nämlichen Exponenten q multiplizirt oder dividirt, mit dem es a im zweyten Gliede ist. (§. 98. 3.) und b kann wieder alle möglichen dritten Glieder bedeuten.

Bey der zweyten Formel ist a q im dritten Gliede mit dem nämlichen Exponenten q multiplizirt oder dividirt, mit welchem es a im zweyten Gliede ist: oder die Verhältnisse a : a q und a q : a q^2 haben den nämlichen Exponenten.

§. 105.

1) In jeder unstettigen geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte des mittleren. Denn in der ersten Formel des vorherg. §. ist

$$I. \times IV. = II. \times III.$$
$$a\,b\,q = a\,b\,q$$

2) In jeder stettigen aber ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Quadrate des mittleren. Denn in der 2ten Formel des vorherg. §. ist

$$I. \times IV. = (III)^2$$
$$a^2\,q^2 = a^2\,q^2.$$

a) Diesen Lehrsätzen zu Folge wird zu drey gegebenen Größen die vierte, zu zwoen die dritte, oder die mittlere Proportionalgröße gefunden, wenn wieder das fehlende Glied = x, gemacht: dann die äußern und mittlern Glieder in einander multiplizirt werden, oder wenn die Proportion stettig ist, das mittlere quadrirt, hernach wieder x wie bey andern Gleichungen gesucht, und die gefundene Größe an den Platz der fehlenden hingeschrieben wird.

§. 106.

§. 106.

1te Aufg. Zu a, b, und c die vierte geometrische Proportional suchen.

Aufl. $a : b = c : x$

× (§. 105. 1.) $a x = b c$

: a $x = \frac{bc}{a}$

Folglich $a : b = c : \frac{bc}{a}$

Probe $bc = a \times \frac{bc}{a} = bc$

a) Eben so ist in Zahlen

I. $3 : 5 = 6 : x \,.\, x = 10$

II. $3 : 5 = x : 6 \,.\, x = 3\frac{3}{5}$

III. $5 : x = 6 : 3 \,.\, x = 2\frac{1}{2}$

IV. $x : 5 = 6 : 3 \,.\, x = 10$

b) Den Beweis und die Probe geben wieder die gleichen Produkte der äußern und mittleren Glieder: oder die in beyden Verhältnissen gleiche Exponenten.

§. 107.

Man kann die Glieder einer Proportion, so oft verändern, ohne die Proportion selbst zu verändern, so oft eben die nämlichen Glieder zugleich die äußern und mittleren werden können, oder solange die Produkte der äußern und mittleren Glieder gleich bleiben. Es seyen zwo Proportionen

$$a : b = c : d$$
$$2 : 4 = 3 : 6$$

So geschieht dieß I. durch die Verwechslung der mittleren oder äußern Glieder, wenn nämlich das 2te zum 3ten, oder das erste zum letzten gemacht wird, und umgekehrt. D. i. wie man's heißt

alternando $a : c = b : d$
$2 : 3 = 4 : 6$

permutando $d : b = c : a$
$6 : 4 = 3 : 2$

II. Wenn man die Verhältnisse umkehrt:

inuertendo $b : a = d : c$
$4 : 2 = 6 : 3$

III. Wenn man die Glieder der Verhältnisse zusammen addirt, oder von einander subtrahirt:

componendo vel differentiando
$$a : a \pm b = c : c \pm d$$
$$2 : 2 \pm 4 = 3 : 3 \pm 6$$

IV. Wenn man entweder ein ganzes Verhältniß, oder die zwey Vorderglieder, oder die zwey Hinterglieder, oder wohl gar die ganze Proportion mit einer dritten Größe multiplizirt oder dividirt:

multiplicando.
1. $a : b\,m = c : d\,m$
$2 \times 3 : 4 = 3 \times 3 : 6$
2. $a\,m : b\,m = c : d$
$2 : 4 = 3 \times 3 : 6 \times 3$
3. $a\,m : b\,m = c\,m : d\,m$
$2 \times 3 : 4 \times 3 = 3 \times 3 : 6 \times 3$
4.
5.

a

diuidendo.

1. $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$

2. $2 : \frac{4}{3} = 3 : \frac{6}{3}$

3. $a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$

4. $\frac{2}{3} : \frac{4}{3} = 3 : 6$

5. $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$

$\frac{2}{3} : \frac{4}{3} = \frac{3}{3} : \frac{6}{3}$

V. Wenn alle Glieder der Proportion zur nämlichen Würde erhoben, oder aus allen die nämlichen Wurzeln ausgezogen werden:

eleuando ad dign. $a^m : b^m = c^m : d^m$

$2^3 : 4^3 = 3^3 : 6^3$

extrah. rad. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$

$\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{216}$

a) Da es nach IV. erlaubt ist, entweder die zwey gleichnamigen Glieder, oder ein Verhältniß, oder gar die ganze Proportion mit einer Größe zu multipliziren, oder zu dividiren; so haben die Hälften, Drittheile ꝛc. das nämliche Verhältniß, welches die Ganzen haben. Zwo Kugeln verhalten sich gegen einander, wie ihre ganzen oder halben ꝛc. Durchmesser.

b) Nach V. aber kann zwar eine ganze Proportion zur nämlichen Würde erhoben und aus allen Gliedern die nämliche Wurzel ausgezogen werden: aber nur mit einem Gliede, oder Verhältnisse darf so eine Veränderung nicht unternommen werden: weil die Gleich-

heit

heit der Produkte der äußern und mittleren Glieder dadurch gestöret würde.

§. 108.

1) Aus eben dem Grunde bleibt die Proportion, wenn die zwey unter einander stehenden Glieder zwoer Proportionen in einander multiplizirt, oder dividirt werden. Z. B.

$$a : b = c : d \qquad 2 : 4 = 3 : 6$$
$$e : f = g : h \qquad 3 : 9 = 4 : 12$$

I. Multiplizirt

$$ae : bf = cg : dh. \qquad 6 : 36 = 12 : 72$$

II. Dividirt

$$\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}. \qquad \frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{3}{4} : \frac{6}{12}$$

2) Sind zwey ungleichnamige Glieder zwoer Proportionen z. B. das dritte in einer, und das vierte in der andern einander gleich: so verhält sich das Produkt der ersten zwey Glieder zum Produkte der zweyten, wie das dritte Glied zum vierten. So ist

$$T : t = E : v$$
$$C : c = v : e$$
$$CT : ct = Ev : ev$$
$$: v\ (\text{§. 107. IV. 3.})\ CT : ct = E : e$$

3) Haben mehrere Proportionen so ein gemeinschaftliches gleiches Glied: so verhalten sich die Produkte aller ersten Glieder zu den Produkten aller zweyten in einander, wie das dritte Glied der ersten Proportion, zum vierten der letzten. D. i.

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ e : f = d : q \\ m : n = q : r \\ \hline aem : bfn = cdq : dqr \end{array}$$

$: dq$ (§. 107. IV. 3.) $aem : bfn = c : r$

§. 109.

Haben zwo oder mehrere Proportionen einerley Verhältniß, so entstehet 1) wieder eine Proportion, wenn ihre gleichnamigen Glieder zusammenaddirt oder subtrahirt werden. Z. B.

Wenn $a : aq = b : bq$

$c : cq = d : dq$

so ist $a \pm c : \overline{a \pm c} \times q = b \pm d : \overline{b \pm d} \times q$

Wenn $2 : 4 = 6 : 12$

$4 : 8 = 1 : 2$

ist add. $6 : 12 = 7 : 14$

subt. $-2 : -4 = 5 : 10$

a) Der Unterschied zwischen der Addition und Subtraktion der homologen Glieder zwoer Proportionen, und ihrer Multiplikation oder Division ineinander besteht darinn, daß die letzte in allen Fällen angehe, wie immer hernach das Verhältniß sey; jene aber nur alsdann, wenn das Verhältniß oder der Exponent der Proportion einerley ist.

§. 110.

§. 110.

Stehen mehrere Glieder als vier mit einander in einer geometrischen Proportion, so verhält sich die Summe oder Differenz aller Vorderglieder zu der Summe oder Differenz aller Hinterglieder, wie ein jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede. D. i.

Wenn I. $a : aq = b : bq = c : cq$ ꝛc.
so ist II. $a \pm b \pm c : aq \pm bq \pm cq = a : aq$
$= b : bq$
$= c : cq$ ꝛc.

Denn im II. ist in jedem Verhältnisse der nämliche Exponent, und das Produkt der äußern und mittleren Glieder eben sowohl wieder gleich, wie im I.

2) In einer stettigen Proportion verhält sich also die Summe aller Glieder weniger dem letzten, zu der Summe aller Glieder weniger dem ersten, wie das erste zum zweyten: weil ein jedes ein Vorderglied ist, ausgenommen das letzte; ein jedes ein Hinterglied, das erste ausgenommen. D. i.

Wenn I. $a : aq = aq : aq^2 = aq^2 : aq^3$
oder II. $a : aq : aq^2 : aq^3$
so ist III. $a + aq + aq^2 : aq + aq^2 + aq^3 = a : aq$

a) Wenn nun im II. die Summe $= S$, das erste Glied $= a$, das letzte $= \omega$ gemacht wird, so ist im

III. $a + aq + aq^2 = S - \omega$.
Und $aq + aq^2 + aq^3 = S - a$:
folglich auch diese Proportion richtig:

$$S - \omega : S - a = a : aq$$

von

von welcher wir in der Summirung der geometrischen Reihen Gebrauch machen werden.

Anmerk. Dieß sind nun die Grundsätze und Lehren, welche sich die Anfänger tief einprägen, und worinn sie wohl geübt seyn dürfen. Die Lehre von den Proportionen ist die Seele der ganzen Mathematik, sagt billig Hr. Prof. Klemm in seinem mathem. Lehrb. Es ist aber auch schlechterdings unmöglich nur einen mittelmäßigen Fortgang in der Physik zu machen, wenn man sie nicht vom Grunde verstehet. Aus dieser Ursache habe ich sie auch weitläufiger vorgetragen, und mit mehrern Beyspielen erläutert, als ich mir Anfangs vorgenommen hatte. Doch sind diejenigen Veränderungen der Proportionen weggelassen worden, welche aus der Gleichheit zwoer Verhältnissen von zween Proportionen mit einer dritten entstehen: weil man dieselben insgemein durch andere Wege suchen kann. Wer sich darum bekümmert, mag sie kurz beysammen in besagtem Klemms Lehrb. §. 277 und 278 nachlesen.

Anwendung der Proportionen auf die gemeine Rechnung.

§. 111.

1) Wenn man in einer geometrischen Proportion, wo das vierte Glied gesucht wird, die algebraischen Zeichen, und das x wegläßt, so hat man ein Beyspiel von der berühmten Regel von Dreyen, (Regel de Tri, Regula trium) welche wegen ihrem ausgebreiteten Gebrauche in der ganzen Mathematik sowohl, als in dem gemeinen Leben die goldene Regel genannt wird. Z. B. Es sey die Frage: wie viel kosten 6 Ellen von einem Tuche, wovon 3 Ellen 6 Thaler kosten? Nach §. 106. a. I. würde es also stehen:

E. : Thlr.		E.		Thlr.
3 : 5	=	6	:	x

Nach der Regel de Tri aber

	E.	Thlr.	E.
	3	5	6
oder auch	E.	E.	Thlr.
	3	6	5

2) Wenn die drey Glieder (vorausgesetzt, daß sich das erste zum zweyten verhalte, wie das dritte zum vierten) einmal so niedergeschrieben sind, so heißt die Regel: **Man multiplizire die letzten 2 Glieder in einander, und theile das Produkt mit dem ersten.** (duc ternum in medium, productum diuide primo). Der Quotient ist die gesuchte vierte Größe.

Es sind aber die zwey letzten Glieder der goldenen Regel nichts anders, als die zwey mittleren Glieder einer ordentlich angesetzten geometrischen Proportion, und geben überall in einander multiplizirt, und mit dem ersten Gliede getheilt $\frac{5 \times 6}{3} = 10$. Folglich ist

a) Die Regel von Dreyen nichts als eine auf eine andere Art angesetzte geometrische Proportion, der das vierte Glied fehlt.

b) Wird ein jedes Beyspiel der Regel de Tri in eine ordentliche geometrische Proportion verwandelt, wenn man x als das vierte Glied hinschreibt, und dann die gehörigen Zeichen zwischen die Glieder setzt.

c) Lassen sich alle Aufgaben der Regel de Tri durch die einzige Art, die vierte Proportional zu finden,

den, (§. 106.) gründlicher, bequemer, und allgemeiner auflösen.

§. 112.

Eben diese Art (§. 106. a.) erstreckt sich auch auf die verkehrte Regel von Dreyen, (die man ehedem von der obigen unterschieden, und also ausgedrückt hat: duc primum in medium, productum diuide terno.)

Man kehrt nämlich ein Verhältniß (§. 99. a) um, und verfährt wie mit geraden Proportionen d. i. man macht aus den bekannten Gliedern, welche gleichen Namen haben, das erste Verhältniß, und setzt das kleinere Glied voraus, wenn das letzte Glied größer werden soll als das dritte; im widrigen Falle aber das größere. Z. B. In wie viel Tagen machen 10 Arbeiter eine Arbeit, welche 6 Arbeiter in 20 Tagen vollenden? Die 6 und 10 Arbeiter geben das erste Verhältniß: weil aber offenbar 10 zu der nämlichen Arbeit weniger Zeit brauchen, als 6 Arbeiter: so muß das letzte Glied kleiner werden, als das dritte = 20: es müßen also die 10 Arbeiter im ersten Verhältnisse voran gesetzt werden, und dann stehet die Proportion also:

$$10 : 6 = 20 : x \text{ . und } x = 12.$$

Anmerk. Der Beweis, daß die gefundene Größe wirklich die verlangte sey, ist aus §. 106. b. zu machen.

§. 113.

§. 113.

1) Wenn (§. 108. 2.) C und c die Ursachen, d. i. die Arbeiter, Kräfte u. d. g. T, und t die Zeiten; E und e die Wirkungen ausdrücken: so verhalten sich die Wirkungen wie die Produkte der Ursachen in die Zeiten

$$E : e = CT : ct$$

2) Sind mehrere Ursachen vorhanden z. B. neben den obigen noch D, d rc. so sind auch diese noch mit den obigen zu multipliziren, oder

$$E : e = CDT : cdt \text{ rc.}$$

3) Das nämliche gilt von der Zeit, wenn sie in einem kleinern Maaße angegeben wird: von Räumen, Geschwindigkeiten u. a., wo zwar nicht Ursachen und Wirkungen vorhanden sind, aber doch das angeführte Verhältniß Statt hat. Z. B. Zween Mühler mahlen mit drey Gängen in 4 Wochen 100 Scheffel: 3 Pachter ackern mit 6 Pflügen in 14 Tägen ein Feld um. Zween Mauermeister verfertigen mit 4 Gesellen, deren jeder 8 Täge hindurch 10 St. arbeitet, eine Mauer, die 40′ hoch, 100′ lang und 5′ dick ist. In diesen Fällen sind die zween Mühler mit den 3 Gängen, und 4 Wochen; die 3 Pachter mit den 6 Pflügen und 14 Tägen; die zween Mauermeister mit den 4 Gesellen, 8 Tägen, 10 Stunden, und die Mauer mit der Höhe, Länge und Dicke zu multipliziren.

a) Man sieht hier offenbar, daß die Ursachen, ihre Hilfsmittel, der sie sich bedienen, die Zeiten rc. ent-

we-

weder Theile voneinander sind, oder doch genau zusammen gehören, und die ganze Stärke der wirkenden Ursache bestimmen. Eben so gehören die Höhe, Länge und Dicke der Mauer zusammen, und bestimmen die Größe der Wirkung. Ueberhaupt gehören zu einer Sache ihr angegebener Werth, auch in einzelnen Stücken genommen; zum Getreidpreis das daraus entstehende Maaß des Getränkes oder Gewicht des Brodes; zur Ladung eines Wagens, Schiffes ꝛc. die Meilenweite; zum Kapital die Zeit und die Prozente; zu den Menschen oder Thieren, Maschinen ꝛc. die Arbeiten, etwas verzehren ꝛc. die Zeit; zu einer Sache ihre Länge, Breite und Dicke; zu was immer für einem Zeitmaaße, ihre kleinen Theile, z. B. zum Jahre die Monate, Wochen, Tage, Stunden, Minuten, Sekunden ꝛc.

§. 114.

Dieß ist nun der Grund der zusammengesetzten Regel de Tri, welche bald Regel von Dreyen, bald Regel von Fünfen, von Sieben u. s. w. genannt wird, nachdem sie aus drey, fünf, oder aus sieben Gliedern ꝛc. besteht, und kurz also zusammengezogen werden mag: **Man multiplizire die genau zusammen gehörigen Glieder** (vorherg. §. a.) **in einander, ordne die Proportion** (wie §. 108 2. und 3.) **und verfahre übrigens wie** §. 106. Z. B. Zween Mauermeister, wovon jeder 4 Gesellen hat, die 8 Tage fort, täglich 10 St. arbeiten, machen eine 40 Schuhe hohe, 100 Sch. lange, und 5 Sch. dick

Mauer. Wie lange werden sie 4 Mauermeister machen, deren jeder 6 Gesellen hat, die 10 Tage täglich eben so lange fortarbeiten, wie die obigen? Weil hier die Dicke und Höhe der Mauer die nämliche werden muß; so kann sie (§. 107. IV. 2.) weggelassen werden, und dann wird die Auflösung so aussehen:

$$2 \times 4 \times 8 \times 10 : 100 = 4 \times 6 \times 10 \times 10 : x$$

$$640 : 100 = 2400 : x$$

: 10. (§. 107. IV. 4.) $64 : 10 = 2400 : x$

nach (§. 105. 1.) $x = \frac{2400 \times 10}{64} = 375.$

a) Die Kettenregel, welche auch hieher gehört, gründet sich auf §. 108. 3., und man verfährt daher nach der dort angezeigten Art. Z. B. 4 Pf. gelten einen Kreuzer; 4 Kreuzer einen Batzen; 15 Batzen einen Gulden; 10 Fl. zween Dukaten: wie viel Pfennige hat ein Dukaten? Man setzt also:

4 : 1 = Pf. : Kr.
4 : 1 = Kr. : Batz.
15 : 1 = Batz. : Fl.
10 : 2 = Fl. : Duk.

$4 \times 4 \times 15 \times 10 : 2 =$ Pf. : Duk.
2400 : 2 = Pf. : Duk.
: 2 (§. 107. IV. 4.) 1200 : 1 = Pf. : Duk.

Anmerk. Ueber diese Regel, welche in der Handlung, Wechselrechnung, in den Vergleichungen der Maaße und Gewichte, von äußerster Wichtigkeit ist, können Fr. Joh. Michael Schwarzers *Arithmetica Mercatorum*, oder vollständiges kaufmännisches Rechenbuch; Johann Franz Roths nützliche Abhandlung von der Wechselrechnung, und Hrn. Eulers vollst. Anleitung zur Algebra *I.* Theil, 9. Kap. gelesen werden.

§. 115.

§. 115.

1) Wenn das Verhältniß einer Summe $a+b+c$: e gegeben ist, so läßt sich nach (§. 106.) zu einem jeden Theil a, b, oder c die vierte Proportional also finden:

$$a+b+c : e = a : x. \qquad x = \frac{a\,e}{a+b+c}$$

$$= b : y. \qquad y = \frac{b\,e}{a+b+c}$$

$$= c : z. \qquad z = \frac{c\,e}{a+b+c}$$

2) Es ist dieses die bekannte Gesellschaftsrechnung, wo $a+b+c$ die zusammen gelegten Summen von Dreyen; e aber ihr gemeinschaftlicher Gewinnst bedeuten, und bey der man, wie Hr. Hofr. Kästner sagt, nach der natürlichen Billigkeit annimmt, was Aristoteles von der Austheilungsgerechtigkeit (iustitia distributiua) gesagt hat. Z. B. Aus drey Kaufleuten hat einer 1000 Fl. der andere 700 Fl. der dritte 900 Fl. zu einen gemeinschaftlichen Handel hergeschossen: sie gewinnen damit 1500 Fl. Was trift jeden?

$$1000 + 700 + 900 : 1500 = 1000 : x$$

oder $2600 : 1500 = 1000 : x$

: 100 (§. 107. IV. 4.) $26 : 15 = 1000 : x.\; x = 576\tfrac{12}{13}$

$$= 700 : y.\; y = 403\tfrac{11}{13}$$

$$= 900 : z.\; z = 519\tfrac{3}{13}$$

a) Sollte die Einlage auf eine bestimmte Zeit geschehen, so wäre dieselbe mit dieser zu multipliziren,

wie vorherg. §. Man müßte z. B. setzen: $1000 \times 2 + 700 \times 3$ 2c. falls jene auf 2; diese auf 3 Jahre hergeschossen worden wäre.

b) Eine Art von der Gesellschaftsrechnung ist die Vermischungs= oder Alligationsregel (regula alligationis) worinn aus dem Verhältnisse einfacher Materien die Menge von jeder gefunden wird, welche mit andern vermischt, eine bestimmte Quantität ausmachen soll. Z. B. nach Mieths Geschützbeschr. II. Thl. 40 Kap. gehören zu einen guten Schießpulver ein ℔ Salpeter, 6 Loth Kohlen, 4 Loth Schwefel. Würden nun 100 ℔ Pulver verlangt, so wäre hier in Lothen, wenn die Quantität des zu nehmenden Salpeters $= x$, der Kohlen $= y$, des Schwefels $= z$

$$32 + 6 + 4 : 100 = 32 : x$$

$$:2 (\S.107.\text{IV}.1.)\ 16 + 3 + 2 : 100 = 16 : x \,.\, x = 76\tfrac{4}{21}$$

$$= 3 : y \,.\, y = 14\tfrac{6}{21}$$

$$= 2 : z \,.\, z = 9\tfrac{11}{21}$$

c) Auch die berufene Regula Falsi hat hier ihren Grund. Man nimmt in dieser etwas als einen Theil an, welches zwar kein wahrer Theil ist, aber doch mit demselben ein Verhältniß hat, woraus er sich wirklich bestimmen läßt. Z. B. 1 Fl. sey also unter 3 Personen so zu vertheilen, daß die zweyte zweymal so viel bekommen soll, als die erste; und die dritte zweymal so viel, als die zweyte. Man setze: der Theil der ersten sey $= 2$, so wäre der Theil der zweyten $= 4$, der dritten $= 8$. Nun ist aber

$$2+4+8:2 = 1\text{ Fl.} : x$$
$$14:2 = 60\text{ Kr.} : x$$
$$:2(\S.107.\text{IV}.4.) \quad 7:1 = 60\text{ Kr.} : x$$
$$x = \tfrac{60}{7} = 8\tfrac{4}{7}\text{ Kr.}$$ Der Theil des ersten.

Der Theil des zweyten wäre also $17\frac{1}{7}$ Kr.; der dritten Person $= 34\frac{2}{7}$ Kr., welche zusammen wieder einen Gulden ausmachen.

Anmerk. Die ganze Regula Falsi, und zum Theil auch die Gesellschaftsrechnung ist einem Algebraisten entbehrlich, welcher dergleichen Aufgaben weit bequemer nach (§. 29.) auflösen wird. Von der Alligationsregel, (deren übrige Arten in der gemeinen Rechnung vorgetragen werden) ist das nämliche schon aus §.33. bekannt. Beyspiele über die Gesellschaftsrechnung liefert uns Hr. Riesen in seiner Rechenkunst für Sehende und Blinde. Ich will hier eines noch von jener Art einrücken, wovon in den rheinischen Beyträgen 9tem Hefte Meldung geschieht. 29 Fl. sollen unter a, b, c also vertheilt werden, daß, wenn a $\frac{1}{2}$ bekömmt, b $\frac{1}{3}$ erhalte: bekömmt aber b $\frac{2}{5}$, so soll c $\frac{5}{7}$ treffen. Es ist hier vor allen der Theil von c aus seinem Verhältnisse mit b also zu suchen:

$$\tfrac{2}{5} : \tfrac{5}{7} = \tfrac{1}{3} : x. \qquad x = \tfrac{25}{42}$$

Unter einerley Benennung ist der Theil von

$$a = \tfrac{1}{2} = \tfrac{21}{42}$$
$$b = \tfrac{1}{3} = \tfrac{14}{42}$$
$$c = \tfrac{25}{42}$$

Wenn man die Zähler addirt, so ist nach der Gesellschaftsrechnung

$$\tfrac{60}{42} : 29 = \tfrac{21}{42} : x$$
$$\times 42\ (\S.107.\text{IV}.2.) \quad 60 : 29 = 21 : x \,.\, x = 10\tfrac{9}{60}$$
$$= 14 : y \,.\, y = 6\tfrac{46}{60}$$
$$= 25 : z \,.\, z = 12\tfrac{5}{60}$$

Es könnte aber dieses auch wieder, nach dem einmal aus der obigen Proportion gefundenen Theile für c, etwa bequemer nach §. 29. gesucht werden. Die Gleichung wäre dann

$$\frac{21x+14x+25x}{42} = 29.$$

§. 116.

1) Wenn man in der Proportion des §. 108. 2., wo C T die Ursache der Wirkung E; c t die Ursache der Wirkung e bedeutet, die äußern und mittlern Glieder in einander multiplizirt: so entsteht diese Gleichung:

$$\begin{matrix} A & & B \\ Ect & = & eCT \end{matrix}$$

Wer diese Gleichung etwas genauer betrachtet, sieht offenbar, daß die Wirkung E auf der Seite A; ihre Ursache C T aber nicht auf der nämlichen Seite A, sondern auf der andern Seite B zu stehen komme. Eben so steht e auf der Seite B bey C T; ihre Ursache c t aber auf der andern Seite A. D. i. in einer solchen Gleichung ist jede Wirkung mit der Ursache der andern Wirkung, nicht mit der ihrigen (Ursache und Wirkung sind aber hier nach §. 113. a. mit allem, was dazu gehört, zu nehmen) multiplizirt.

2) In eben dieser Gleichung kömmt der Name eines jeden Dinges auf der einen Seite so oft vor, als auf der andern.

3) Man kann aber die Faktorn der beyden Glieder statt des = auch mit einem der Länge nach herabgezogenen Striche also unter einander setzen:

A	B
E	e
c	C
t	T

So verfährt man in der reesischen Regel.

a) Es ist also die reesische Regel nichts anders, als eine auf eine andere Art ausgedrückte Gleichung, welche aus einer Proportion entstanden ist.

b) Muß die Sache, welche gesucht wird, entweder als Wirkung, oder als Ursache, oder doch als ein Theil davon (§. 113. a.) angesehen, folglich auf eine; und das, für welches sie gesucht wird, auf die andere Seite: die übrigen vorhandenen Größen aber also angesetzt werden, daß auf einer Seite eben die Nämen vorkommen, welche auf der andern stehen.

c) Ist ein Bruch auf einer Seite, so darf nur dessen Nenner, wie bey andern Gleichungen (§. 23. d.) auf die andere Seite übersetzt werden.

d) Eben so ist es erlaubt nach (§. 23.) beyderseits mit einer Zahl zu dividiren oder zu multipliziren, welches letzte hier geschieht, wenn nur zu beyden Gliedern A und B eine nämliche dritte Größe geschrieben wird, und man das Ersetzen nennt.

e) Erhält man jeden unbekannten Theil auf der Seite A wenn man das Produkt der Faktorn von B durch das Produkt der Faktorn bey A dividirt. Denn es sey E unbekannt, und hieße also x, so ist

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ x & e \\ c & C \\ t & T \\ \hline \end{array}$$

Folglich $\quad xct = eCT$

$:ct \quad x = \frac{eCT}{ct}$

Dieses ist nun der ganze Grund der reesischen Regel, welche vielleicht auf diese Art am deutlichsten vorgetragen wird.

§. 117.

1) Man machet einen geraden Strich herab, und setzt den Name derjenigen Sache, welche gesucht wird, sammt allen dem, was genau dazu gehört, auf die linke Seite zu erst hin: die aber, für welche jene gesucht wird, mit allen dem, was dazu gehört, auf die rechte Seite gerade gegen über.

2) Die noch übrigen in der Aufgabe vorkommenden Dinge vertheilt man also auf beyden Seiten, daß jedes auf einer so oftmal vorkomme, als auf der andern; indem man immer mit dem Name derjenigen Sache auf der einen Seite anfängt, mit der man auf der andern aufgehört hat.

3) Kommen Brüche vor, so werden nur die Nenner auf der Seite, wo sie sind, ausgestrichen, und auf die andere hinübergeschrieben.

4) Werden beyderseits in zween Faktorn gleichviele Nullen, oder gleiche Faktorn, wenn sie vorhanden sind, ausgestrichen, oder nach vorherg. §. zween Faktorn so lange mit einer nämlichen Zahl dividirt, als es angeht.

5) Endlich multiplizirt man die übrigen Zahlen beyderseits in einander, und dividirt das Produkt der Seite B durch das Produkt der Seite A, der Quotient giebt die gesuchte Größe. Z. B. wie viel Zins tragen 5300 Fl. in $\frac{3}{4}$ Jahren, nach 3 Prozento, wenn 600 Fl. nach 5 Prozento in $\frac{1}{2}$ Jahre 15 Fl. tragen? Man setzt also:

	A	B	
	Zins.	5300	Kap.
Kap.	600	$\frac{3}{4}$	Jahre.
Jahr.	$\frac{1}{2}$	3	Prozento.
Prozento.	5	15	Zins.
	4	2	
	2	3	
	2		
	4	477	

Antw. $\frac{477}{4} = 119\frac{1}{4}$ Fl.

Erläut. 1) Wird hier der Name der gesuchten Sache oder der Zins auf die linke Seite A; 5300 Fl. Kap. $\frac{3}{4}$ Jahre und 3 Proz. nach (§. 117. 1.) auf die rechte: dann 600 Fl. Kap. $\frac{1}{2}$ Jahre, und 5 Proz. wieder auf A und die 15 Fl. Zins nach diesem (§. 2.) wieder auf B gesetzt.

2)

2) Nachdem dieses geschehen, werden die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ aufgehoben, indem man den Nenner 2 auf der Seite A, und den Nenner 4 auf der Seite B durchstreicht, und diesem §. 3. zu Folge, beyde auf die entgegengesetzte Seite übersetzt.

3) Werden von 600 und 5300 überall die zwo Nullen ausgestrichen: bey A, 4 und bey B, 2 mit 2 dividirt, wodurch sich hier 2 aufhebt, in A aber 2 bleibt, welches herabgesetzt wird. Eben so giebt 3 in 6 bey A, 2, welches man wieder herabschreibt; bey B wird der eine Faktor 3 aufgehoben, also wieder durchgestrichen.

4) Endlich geben in A die übrig gebliebenen Faktorn $2 \times 2 = 4$; die bey B aber $35 \times 3 \times 3 = 477$ welches mit jenem getheilt $\frac{477}{4} = 119 \frac{1}{4}$ Fl. der gesuchte Zins ist.

a) Die Probe zu machen, wird die gefundene Größe an die Stelle der gesuchten gesetzt, und wenn dann entweder beyde Glieder einander gleich sind, oder nach eben gemeldter Verfahrungsart sich durch die Division aufheben, so ist die Auflösung richtig.

Die Probe des hier angeführten Beyspieles ist also gemacht, wenn die $119 \frac{1}{4}$ Fl. $= \frac{477}{4}$ Fl. als der gefundene Zins auf die Seite A an die Stelle des gesuchten hingesetzt werden: denn hernach werden wirklich beyde Glieder o.

Zins.

Probe.

	A	B	
Zins.	477	5300	Kap.
	4	3	
Kap.	600	4	Jahr.
Jahr.	$\frac{1}{2}$	3	Prozento.
	2	15	Zins.
Prozento.	5	2	
	2	3	
	159		
	53		
	o	o	

b) Gemischte Brüche werden nach (§. 42. b.) behandelt, und dann wie oben verfahren. Z. B. Wenn 2 ½ Zent. einer Waare 10 Dukaten kosten: wie viel kosten 9 ⅜ Zent?

	A	B	
	Duk.	9 ⅜	Zent.
Zent.	2 ½	10	Duk.
	Duk.	$\frac{75}{8}$	
Zent.	$\frac{5}{2}$	8	
	2	10	
	8	2	
	4	2	
	2		
	2	75	

Also $\frac{75}{2}$ = 37 ½ Dukaten.

Probe

	A	B	
Duk.	37 ½	9 ⅜	Zent.
Zent.	2 ½	10	Duk.
Duk.	$\frac{75}{2}$	$\frac{75}{8}$	Zent.
Zent.	$\frac{5}{2}$	10	Duk.
	8	2	
	4	2	
	2	2	
	o		

c)

c) Wenn nach der Aufgabe auf beyden Seiten nicht gleiche Nämen zu stehen kommen: so müssen diejenigen, welche mangeln, ersetzt werden. Diesem zu Folge würde das (§. 115. a.) angeführte Beyspiel von der Kettenregel also aussehen:

	A	B	
	Pf.	2	Duk.
Duk.	2	10	Fl.
Ersetzt. Fl.	1	15	Batz.
Batz.	1	4	Kr.
Kr.	1	4	Pf.
		5	
Antw.		1200	Pf.

d) Weil 60 Kr. einen Gulden ausmachen, so kann man 2 Fl. 3 Kr. durch 2 $\frac{3}{60}$ Fl. ausdrücken; und 2 Fl. 3 Kr. 2 Pf. durch 2 Fl. 3 $\frac{1}{2}$ Kr. = 2 $\frac{\frac{7}{2}}{60}$ Fl. (§. 39. b.) = 2 $\frac{7}{120}$ Fl. u. s. w. Im Gewichte ist 1 Zent. 80 ℔ = 1 $\frac{80}{100}$ Zent. = 1 $\frac{4}{5}$ Zent. 2 ℔, 8 L. = 2 $\frac{8}{32}$ ℔ = 2 $\frac{1}{4}$ ℔. Wenn also genannte Zahlen, wie in den bisherigen Fällen vorkommen: so werden zu erst die kleinern Zahlen in Brüche der der höhern Art verwandelt, wenn man nur die Anzahl welche von ihnen zur höhern Art erfodert wird, als den Nenner darunter setzt: dann dieselben nach (§. 40. 3.) einfacher ausdrückt, und als gemischte Brüche behandelt. Z. B. 2 ℔. 8 L. haben 2 Fl. 3 Kr. 2 Pf. gekostet, was kosten 2 Zent. 40 ℔?

Probe

A	B	A Probe.	B
Fl.	2 Zent. 40 ℔.	Fl. 219 $\frac{5}{9}$	2 Z. 40 ℔.
℔ 2. L 8.	2 Fl. 3 Kr. 2 Pf.	℔. 2. L. 8	2 Fl. 3 Kr. 2 Pf.

Fl.	$\frac{12}{5}$ Zent.	Fl. $\frac{1976}{9}$	$\frac{12}{5}$ Z.
℔. $\frac{9}{4}$	$\frac{247}{120}$ Fl.	℔. $\frac{9}{4}$	$\frac{247}{120}$ Fl.
Ers. Zent. 1	100 ℔.	Ersetzt. Z. 1	100 ℔.
120	4	5	9
5	2	120	4
9	1976	988	2
Antw. $\frac{1976}{9} = 219\frac{5}{9}$ Fl.		247	
		0	0

e) Nach den bisherigen Vorschriften verfährt man auch bey den verkehrten Verhältnissen. Z. B. Wenn 4 Ellen $\frac{9}{4}$ breites Tuch ein Kleid geben: wie viel muß man haben, wenn das Tuch nur 1 $\frac{1}{2}$ breit ist?

A	B	A Probe.	B
Ell.	1 Kl.	Ell. 6	1 Kl.
Breit. $\frac{3}{2}$	4 Ell.	Breit. $\frac{3}{2}$	4 Ell.
Kl. 1	$\frac{9}{4}$ Breit.	Kl. 1	$\frac{9}{4}$ Breit.
4	2	4	2
	3	2	3
Antw.	6	0	0

f) Für die Kettenregel ist schon das Beyspiel in diesem §. d. angegeben worden. Bey der Gesellschaftsrechnung gilt das nämliche: nur muß sie so oft aufs Neue angesetzt werden, als die Zahl der Personen ist, die in der Gesellschaft stehen.

An-

Anmerk. Diese sind nun die Grundsätze und Hauptvortheile der allgemeinen reesischen Rechnung. Wenn wir betrachten, wie diese einzige alle übrigen Regeln entbehrlich macht; wie vielen Schwierigkeiten in den mannigfältigen Fällen die zusammengesetzten Regeln von Dreyen, von Fünfen, Sieben, der Ketten- Gesellschafts- Alligationsregel, und was sie immer für Nämen haben, unterworfen seyen; wie viele Abänderungen, Erläuterungen und Regeln man sich selbst über die Regeln zu merken habe: wie sich hingegen alle durch diese einzige mit so weniger Mühe verrichten lassen: wie sehr die sonst so großen Beschwernisse mit den Brüchen zusammenschwinden; wie allgemein hier von sich selbst der Vortheil der welschen Praktik werde, ohne davon viel Wesen zu machen, und neue Regeln aufzudringen: und wie dieses alles aus den einfachsten Grundsätzen der Proportionen und Gleichungen folge: so müssen wir wahrhaftig eingestehen, daß die reesische Rechnung die größte Erfindung der gemeinen Arithmetik sey. Wir haben sie dem Herrn von Rees einem Holländer zu verdanken, von dem sie auch den Name hat. Er machte dieselbe anfangs in holländischer Sprache bekannt, von der sie nachher in die französische, aus dieser 1739 von Hrn. Hofr. Ludw. Martin Kahle zu Bremen in die deutsche übersetzt, und in der Folge öfters, besonders 1751 von Mich. Lorenz Willig herausgegeben wurde, unter dem Titel: Allgemeine Regel der Rechenkunst, oder neueste Art, alle Aufgaben, in welchen etwas ein Verhältniß zu andern Dingen hat, kurz und leicht aufzulösen: in holländischer Sprache von K. Fr. de Rees verfertiget, nunmehro übersetzt von einem Liebhaber mathematischer Künste. Der Werth der Erfindung verbreitete sich bald, und erwarb sich verschiedene Schriftsteller. Hr. Lappenberg gab einen lateinischen Aufsatz heraus von den Gründen der reesischen Regel. Hr. Stritter zeigte in seinem Exempelbuche die Brauchbarkeit derselben. Wirz in den Wechselarbitragentraktat wandte sie auf die Ketten- und Wechselrechnung an. Vorzüglich hat sich oben angeführter Hr. Willig 1759 in zween Bänden seiner gründlichen Vorstellung der reesischen allgemeinen Rechnung zu Bremen und Göttingen, darüber ausgebreitet. Auch Hr. Prof. Klemm empfiehlt

sie §. 379. seines mathematischen Lehrbuchs: führt §. 781. u. ff. Beyspiel an, und §. 383. leitet er den Vortheil der beyderseitigen Division aus der Lehre der Brüche her. Im Jahre 1778 haben J. L. Huth zu Halberstadt, und J. G. Schmalzried zu Ludwigsburg Rechenbücher von dieser Art geschrieben, in welchen man, so wie in dem schon genannten J. F. Roths Wechselarbitrage von der Stadt Augsburg, Wien und Venedig rc. eine Menge von allen Arten Beyspiele finden kann.

In Rücksicht auf die großen Vortheile dieser Rechnung hat die kurfürstliche Schuldirektion verwichenes Jahre in der hiesigen Real- und Vorbereitungsklasse einen Versuch gemacht, und die reesische Regel vortragen lassen. Der Erfolg übertraf die Erwartung so weit, daß man bereits nach einem halben Jahre schon in der öffentlichen Prüfung mit Freude und Verwunderung Knaben zwischen 8 und 12 Jahren, neben allen übrigen Gegenständen, über die sie in diesen Klassen antworten mußten, die schwersten Aufgaben von fünf, sieben, neun und eilf Glieder nebst allen Arten von Brüchen mit ungemeiner Fertigkeit auflösen sah. Es wird daher diese Rechnung nicht nur in den zwoen gemeldten Klassen fortgesetzt, sondern die kurfürstliche Direktion hat auch die Verfügung getroffen, daß sie in allen deutschen Stadt- und Landschulen eingeführet werde.

Anwendung der Proportionen auf die Physik und fernere Mathematik.

§. 118.

Erläut. 1) Das Verhältniß zweyer Dinge gegen einander wird auf die (§. 95.) schon angezeigte Art ausgedrückt. Man schreibt z. B.: der körperliche Innhalt des Zylinders verhält sich zu jenem der Kugel, wie 3 : 2. Das Gewicht des Goldes zum Gewichte des

Was-

Wassers wie 19, 5 : 1. Die Dichtigkeit des Eisens zur Dichtigkeit des Bleyes, wie 7, 645 : 11, 310. Nach Bouguers Berechnung ist die Erde beym Aequator um so viel erhabener, als bey den Polen, daß sich ihre Durchmesser gegen einander verhalten, wie 179 : 178.

2) Das Verhältniß eines Dinges zu ihren Theilen oder Eigenschaften in Buchstaben wird auf Art einer Gleichung angezeigt. So sagt man, die Peripherie P, des Zirkels ist, wie sein ganzer D, oder halber Durchmesser R. $P = D = \frac{D}{2} = R$. Die Dichtigkeit eines Körpers ist, wie seine Masse M. $D = M$. Die Geschwindigkeit C eines gleichförmigbewegten Körpers, wie der Raum S, den er in einer bestimmten Zeit zurückelegt. $C = S$. Der Druck V einer flüßigen Materie, wie ihre Perpendikularhöhe a. $V = a$.

a) Diese letzten Ausdrücke sind aber nur von dem Verhältnisse, nicht von der Gleichheit zu verstehen. Darum man sie vielleicht besser so setzen könnte: $P \backsim D$. $D \backsim M$. ꝛc.

b) Wenn das Verhältniß zweyer Dinge gegen einander einmal richtig, wie 3 : 2 bey der Kugel und dem Zylinder, und eines davon wirklich bekannt ist, so kann auch das andere gefunden werden. Z. B. Wenn ich weis, daß der Zylinder 15′ habe, so ist $3 : 2 = 15 : x$, und $x = \frac{30}{3} = 10$. D. i. eine Kugel von gleicher Höhe und Durchschnitte wird 10′ im körperlichen Innhalte haben.

c) Eben so verfährt man, wenn nach dem zweyten Satze dieses §. ein Glied eines Verhältnisses gesucht werden soll. Z. B. den Druck einer flüßigen Materie unter zweyerley Höhen zu bestimmen, wird die größere Höhe durch A, die kleinere durch a, so auch der größere und kleinere Druck durch P und p ausgedrückt: dann ist

$$a : A = p : P.$$

Wenn nun bekannt ist, daß der Druck des Wassers unter der Höhe von 10′ = 50, und der Druck desselben bey der Höhe von 35 gesucht wird: so ist $a = 10$; $A = 35$; $p = 50$; P unbekannt. Man kann also setzen:

$$10 : 35 = 50 : x . x = 175:$$

Und so können auch aus wahren Gleichungen Proportionen gemacht werden: denn gleiche sind um so mehr, als sie gleich sind, proportional. Man lehrt in der Physik: die Masse M eines Körpers sey seinem Gewichte P gleich, oder $M = P$: es ist daher in zween Körpern $M : m = P : p$.

d) So wie ein Verhältniß als eine Gleichung ausgedrückt werden kann, ist es auch erlaubt, mit demselben wie mit einer Gleichung umzugehen. (§. 23.)

§. 119.

1) Alle geometrische Proportionen werden in Gleichungen verwandelt, wenn nur (§. 105. 1.) die äußern, und mittleren Glieder in einander multiplizirt werden, oder das mittlere, falls die Proportion stettig ist, (§. 105. 2.) quadrirt.

2) Hingegen werden auch alle Gleichungen z. B. a x = b c in Proportionen aufgelöset, wenn aus den Faktorn a, x des einen Gliedes der Gleichung, die zwey äußern Glieder der Proportion, und aus den Faktorn b, c des andern, die mittleren Glieder gemacht werden: so wird

$$a : b = c : x$$

a) Auf diese Art wird $x^2 = a\ b$ zu dieser stetigen Proportion $a : x : b$.

b) Weil in $M = V\ D$, $M = 1\ M$ (§. 14.), so wird folgende Proportion daraus $1 : V = D : M$.

c) Ist ein Bruch in der Gleichung z. B. $C = \frac{S}{T}$, so darf nur der Nenner regelmäßig übersetzt werden; dann wird $C\ T = S$, und $C : S = 1 : T$.

§. 120.

Wenn beyde, oder auch nur das eine Glied eines Verhältnisses ein Produkt, oder ein Quotient von mehreren Größen ist, wie §. 107. IV. und §. 108., heißt man's ein zusammengesetztes Verhältniß (ratio composita) welches im ersten Falle durchaus gerade, im zweyten aber theils gerade, theils verkehrt ist (§. 99. c). Ich will hier einige Beyspiele aus der Physik entlehnen. Wenn die Dichtigkeit eines Körpers = D; die Masse = M; der äußere Umfang, oder das Volumen = V: so lehrt die Physik: $D = \frac{M}{V}$ oder die Dich-

tig-

tigkeit hat ein zusammengesetztes Verhältniß aus dem geraden der Masse, und dem verkehrten des Volumens. Daher in zween Körpern $D : d = \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$. Hingegen $M = V D$. D. i. die Masse hat ein zusammengesetztes Verhältniß aus der Dichtigkeit in das Volumen, welches ganz gerade ist, und die Proportion $M : m = V D : v d$ giebt. Eben so ist nach der Lehre von der Bewegung $C = \frac{S}{T}$. D.i. die Geschwindigkeit C eines gleichförmig bewegten Körpers hat ein zusammengesetztes Verhältniß aus dem geraden des Raumes S, den er durchläuft, und dem verkehrten der Zeit T, die er dazu braucht, $C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$. Aber der Raum $S = C T$ hat ein zusammengesetztes, und ganz gerades Verhältniß aus der Geschwindigkeit in die Zeit, und es ist $s ; S = c t ; C T$.

§. 121.

1) Sind zween oder drey Faktorn eines Gliedes bey einem zusammengesetzten Verhältnisse einander gleich, so entsteht im ersten Falle ein duplizirtes oder Quadratverhältniß (ratio duplicata, quadrata) im zweyten ein triplizirtes oder Würfelverhältniß (ratio triplicata, cubica) u. s. w. Daher sagen wir in der Geometrie, die Peripherien zweener Zirkel verhalten sich zwar, wie ihre Durchmesser (§. 118. 2.) D. i. sie haben ein einfaches Verhältniß mit ihren Durchmes-

 sern:

ſern: P ∽ D, und P : p = D : d. Die ganzen Zirkelflächen hingegen, und die Oberflächen S der Kugeln, oder auch anderer Körper, stehen mit ihren Durchmeſſern in einem Quadratverhältniſſe. D. i. S ∽ D^2, und $S : s = D^2 : d^2$. Die ganzen Kugeln oder Körper K aber, nach ihrem dichten Innhalte betrachtet, verhalten ſich gar, wie die Würfel ihrer Durchmeſſer: K ∽ D^3, und $K : k = D^3 : d^3$. Eben ſo lehrt die Phyſik, daß ſich in der immer gleichförmig zunehmenden Bewegung die zurückegelegten Räume S verhalten, wie die Quadrate der Zeiten T^2, in welchen ſie zurückgelegt worden: S ∽ T^2 und $S : s = T^2 : t^2$.

2) Weil S ∽ D^2; K ∽ D^3, ſo muß nach §. 81. im erſten Falle D ∽ $\sqrt{S}$, im zweyten D ∽ $\sqrt[3]{K}$ ſeyn. Man heißt ſie quadratiſche, und kubiſche Wurzelverhältniſſe (rationes ſubduplicatas, ſubtriplicatas) und in dieſem Verſtande ſagt der Naturlehrer von der gleichförmig beſchleunigten Bewegung, daß ſich die Zeiten T verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Räumen S, oder Höhen, durch die z. B. ein ſchwerer Körper gefallen iſt. T ∽ $\sqrt{S}$ und $t : T = \sqrt{s} : \sqrt{S}$.

a) Es zeigt ſich hier von ſich ſelbſt der Unterſchied zwiſchen einem duplizirten und doppelten; triplizirten und dreyfachen: wie auch zwiſchen einem halbtheiligen und ſubduplizirten; drittheiligen und ſubtriplizirten Verhältniße: P ∽ 2 R iſt ein doppeltes (ratio dupla) P ∽ 3 R ein dreyfaches (ratio tripla) Verhältniß:

Eben

Eben so ist $P \backsim \frac{D}{2}$ ein halbtheiliges Verhältniß. (ratio subdupla) $P \backsim \frac{D}{3}$ (ratio subtripla).

b). Nun sind wir schon im Stande auch folgende Ausdrücke der Naturlehre zu verstehen. Die Schwere V eines Körpers ist mit dem Abstande R vom Mittelpunkte, gegen welchen er schwer ist, in einem verkehrten Quadratverhältnisse. $V \backsim \frac{1}{R^2}$. Der Schall und das Licht nehmen ab, wie die sphärischen Oberflächen wachsen d. i. verkehrt, wie die Quadrate der Entfernungen vom leuchtenden und schallenden Körper ꝛc.

Anmerk. Wenn wir bedenken, wie oft diese und dergleichen Ausdrücke in der Naturlehre vorkommen, und wie unmöglich es sey, sie ohne den bisher vorgetragenen Lehren zu verstehen: wie ist es möglich, daß es heute zu Tage Gelehrte geben könne, die sich eine Physik ohne Mathematik zurückwünschen? Und ist es nicht beynahe unverschämt, daß sich manchmal ein Mann zum Richter einer Wissenschaft aufwirft, von der er nicht einmal die Sprache kennt? Ich will, um den Nutzen und Gebrauch der bisherigen Lehren zu zeigen, noch einige brauchbare Aufgaben anführen, und dazu eben aus der Naturlehre den Stoff nehmen.

§. 122.

1te Aufg. Eine Höhe oder Tiefe durch den Fall eines Steines messen.

Aufl. Man zählt die Sekunden, welche der Stein braucht, bis er den Boden erreicht (wenn man keine Sekundenuhr bey der Hand hat, kann man seine Pulsschläge zählen, sie für Sekunden gelten lassen, und her=

hernach mit einer Sekundenuhr vergleichen) z. B. man habe 6″ gezählt: so ist voraus bekannt, daß ein Stein in 1″ durch 15′ falle: man setzt dann nach (§. 118. c.)

$$t^2 : T^2 = s : S$$
$$1^{2\prime\prime} : 6^{2\prime\prime} = 15' : x$$
$$1'' : 36'' = 15' : x \,.\, x = 540'$$

die gesuchte Höhe oder Tiefe. Reisende können oft von dieser Aufgabe guten Gebrauch machen.

2te Aufg. Auf der Oberfläche der Erde hat ein Stein so eine Schwere, daß er in 1″ durch 15′ fallen würde: wie groß ist seine Schwere in einer Entfernung von 60 halben Erddurchmessern: oder an der Laufbahne des Mondes?

Aufl. Weil (vorhg. §. b.) die Schwere $V \backsim \frac{1}{R^2}$, so ist in den zwoen Entfernungen

$$V : v = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$$

(§. 112.) $R^2 : r^2 = V : v$

$$60^2 : 1''^2 = 15' : x \,.\, x = \frac{15'}{60^2}$$

Dieß wäre die Schwere oder der Raum, den er an der Laufbahne des Mondes in einer Sekunde machen würde. Um sie nun auch für eine Minute, oder 60″ zu finden, setzt man also: In 1″ machte er $\frac{15'}{60^2}$, wie viel in 60″? Weil aber in dieser Bewegung $S \backsim T^2$, so müßen die Zeiten d. i. 1″ und 60″ quadrirt werden: also wird die Proportion

$$1'^2 : \frac{15'}{60^2} = 60''^2 : x$$

$$x = \frac{15' \times 60''^2}{60''^2}$$

In einer Minute wurde er also durch 15′ d. i. durch gerade so viele Füße fallen, als er auf der Oberfläche der Erde in einer Sekunde macht. Wir werden in der Physik beweisen, daß eben dieß die Schwere des Mondes sey.

3te Aufg. Die Zeit suchen, welche ein Stein in seinem beschleunigten Falle bis zu den halben Erdstral, oder den 4ten Theil des ganzen Erddurchmessers brauchen würde.

Aufl. Der ganze Erdstral hält 860 Meile, also der halbe 430^m: diese, wenn die Meile zu 24000′ gerechnet wird, betragen 10320000′. Ich setze dann nach vorherg. §. 2.

$$\sqrt{s} : \sqrt{S} = t : T$$

$$\sqrt{15} : \sqrt{10320000} = 1'' : x$$

$$x = \sqrt{\frac{10320000}{15}} = \sqrt{688000} = 829''$$

irrat.

4te Aufg. Wie viel Kerzenlichter braucht der in einer Entfernung von 16′ eine Schrift zu lesen, welcher sie mit einem Lichte in einer Entfernung von 8′ gerade noch lesen kann?

Aufl. Weil das Licht verkehrt abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung vom leichtenden Körper (vorhg. §. b.) so ist

$$8^2 : 16^2 = 1 : x \,.\, x = \frac{256}{64} = 4.$$

§. 123.

1) Verhältnisse, deren eines oder gar alle beyde Glieder irrational sind, heißen Irrationalverhältnisse.

2) Sie können durch die Division beyder Glieder mit der nämlichen Größe (§. 107. IV.) rational gemacht werden.

So ist: $2 \sqrt{5} : 9 \sqrt{5} = 2 : 9$.

3) Auch können irrationale Verhältnisse durch **rationale beynahe** ausgedrückt werden, wenn man nach §. 73. die Wurzel durch Näherung sucht, und beyde Glieder mit dem Nenner des Dezimalbruches nach §. 107. IV. 2. multiplizirt. Z. B. $12 : \sqrt{3} = 12 : 1,7$ beynahe $= 120 : 17$. Mit zwo Dezimalen, und also noch genauer wird $12 : \sqrt{3} = 12 : 1,73 = 1200 : 173$. S. Kästners Anfgr. der Arithm. ꝛc. 5 Kap. 23 u. ff.

II. Ab=

II. Abschnitt.

Von den Progreßionen.

§. 124.

Eine Reihe von mehreren in einer stettigen Proportion auf einander folgenden Größen, heißt eine arithmetische oder geometrische Progreßion, je nachdem die Proportion arithmetisch oder geometrisch ist.

§. 125.

Wenn das erste Glied = a; die Differenz = d; die Zahl der Glieder = n; so ist die allgemeine Formel für alle arithmetische Progreßionen:

$$\begin{matrix} I. & II. & III. & IV. & V. & & N. \\ a. & a\pm d. & a\pm 2d. & a\pm 3d. & a\pm 4d & --- & a\pm(n-1)d \end{matrix}$$

a) Wenn a = 1; d = 2, so ist die Reihe in Zahlen 1 . 3 . 5 . 7 . 9 ꝛc. und wenn in dieser 1 = 15, so wird sie: 15 . 45 . 75 . 105 . 135 ꝛc. Eben so, wie die Räume oder die Höhen eines fallenden Körpers in den Zeiten 1, 2, 3, 4, 5 wachsen, wie die Physik lehret.

§. 126.

Wenn das letzte Glied = ω, so ist hier offenbar bey einer wachsenden Progreßion

$$\text{I.} \quad \omega = a + (n-1)d$$
$$= a + dn - d.$$

a)

a) Daraus wird durch die Uebersetzung

$$a = \omega - (n+1)\,d = \omega - d\,n + d.$$

$$d = \frac{\omega - a}{n - 1}$$

$$n = \frac{\omega - a + d}{d} = \frac{\omega - a}{d} + 1$$

b) Weil das letzte Glied $= a + d\,n - d$, muß das vorletzte $= a + d\,n - 2\,d$ seyn ꝛc.

c) Wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist; so stehen $\frac{n-1}{2}$ Glieder vor, und eben so viele nach dem mittleren Gliede: das mittlere wäre also von vornen aus gerechnet das $\frac{n-1}{2} + 1$te Glied: folglich die Differenz desselben $(\frac{n-1}{2} + 1 - 1)\,d$ (weil die Differenz allemal $n - 1$ ist) $= (\frac{n-1}{2})\,d$, und das ganze Glied $= a + (\frac{n-1}{2})\,d$.

§. 127.

1) In einer arithmetischen Progreßion ist allemal die Summe der zwey äußersten Glieder = der Summe jeder zwey gleichweit davon abstehenden. Und

2) Dem doppelten des mittleren, wenn die Anzahl der Glieder ungleich ist.

Es zeigt sich zwar dieß, wenn nur in der allgemeinen Formel das Ite und Vte addirt werden: denn ihre Summe wird allemal gleich seyn dem II + IV und dem doppelten des IIIten: doch kann es allgemeiner also bewiesen werden.

1)

1) $a + \omega = a + a + dn - d = 2a + dn - d$. Das nächste an a ist $a + d$, das nächste vor ω aber $a + dn - 2d$ (vorhg. §. b.) und ihre Summe

$$a + d + a + dn - 2d = 2a + dn - d$$

folgl. (§. 6. 4.) $a + \omega = a + d + a + dn - 2d$. D. i. die Summe des ersten und letzten Gliedes, ist der Summe des 2ten und vorletzten gleich, es möge die Zahl der Glieder so groß seyn, als sie wolle.

2) $a + \omega = 2a + dn - d$. Das mittlere Glied ist $= a + (\frac{n-1}{2}) d$, und dessen doppeltes oder $(a + (\frac{n-1}{2}) d) \times 2$ ist auch $= 2a + dn - d$: also ist auch

$$a + \omega = \overline{a + (\tfrac{n-1}{2}) d} \times 2.$$

a) Fällt die Progreßion, so ist $a + \omega = 2a + a - d(n-1)$; das 2te und vorletzte $= a - d + a - d(n-2)$; das doppelte des mittleren $= \overline{a - d(\frac{n-1}{2})} \times 2$, welche alle $= 2a - dn + d$ sind.

§. 128.

Weil $a + \omega$ = jeden zweyen gleichweit abstehenden Gliedern einer arithmetischen Progreßion, und dem doppelten des mittleren, wenn die Zahl der Glieder ungleich ist; so ist $(a + \omega) \times n$ = der doppelten Summe, und folglich $(a + \omega) \times \frac{1}{2} n$ die wahre Summe S aller Glieder, oder der ganzen Progreßion. D. i.

$$S = (a + \omega) \times \tfrac{1}{2} n = \frac{an + \omega n}{2}$$

a) Daraus wird wieder:

$$a = \frac{2S}{n} - \omega. \quad n = \frac{2S}{a+\omega}. \quad \omega = \frac{2S}{n} - a.$$

b) Wird in $S = \frac{an + \omega n}{2}$ für ω gesetzt $a + dn - d$, so ist $S = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$, wodurch jede zwey fehlende z. B. n und S also gefunden werden: $n = \frac{\omega - a + d}{d}$; also $S = (a+\omega) \times \left(\frac{\omega - a + d}{2d}\right)$.

c) Ist in einer Progreßion $a = 0$, so wird $\omega = dn - d$, und also auch $S = \frac{\omega n}{2}$. Den Gebrauch dieser Formeln sollen folgende Aufgaben zeigen.

§. 129.

1te Aufg. Wenn (§. 122.) ein Körper wirklich in 829″ bis zu den 4ten Theil des Durchmessers der Erde gefallen wäre: wie viel hätte er in der letzten Sekunde Füße zurückgelegt, und wie viele in allen 829″?

Aufl. Es würde hier also 1) das ω, 2) S′ gesucht. Nun ist $n = 829''$; $a = 15$; $d = 30$ (§. 125. a.) folglich 1) $\omega = a + (n-1)d$

$$= 15 + 828 \times 30 = 24855'$$

2) $S = \frac{an + \omega n}{2} = \frac{15 \times 829 + 24855 \times 829}{2}$

$10308615 = 429 \frac{2615}{24000}$ Meilen oder 429 M. 2615′, welche nicht mehr genau die §. 122. angegebenen 430 Meile sind; weil auch die Wurzel 829 nur irrational war.

An-

Anmerk. Von dem ersten Theile dieser Aufgabe werden wir wieder in der Physik Gebrauch machen, und zeigen, daß eben dieß (die Geschwindigkeit nämlich, mit der ein Körper in einer Sekundminute durch 24855′ fortzufliegen im Stande wäre) die Kraft sey, mit welcher er auf einem erhabenen Orte horizontal geworfen werden müßte, wenn er gleichsam als ein neuer Mond sich immer um die Erde fortdrehen sollte.

2te Aufg. Auf einer Festung geschieht mit einer Bombe ein Horizontalschuß, oder Kernwurf: man sucht die Höhe, von der die Bombe gefallen ist.

Aufl. Es wird hier die Summe der geometrischen Progreßion (§. 125. a.) gesucht. Diese zu finden muß vorher ω gefunden werden. Gesetzt also man hätte von dem Augenblicke an, wo man das Feuer sah, bis die Bombe die Erde berührte, 7″ gezählt, so wäre $\omega = a + (n - 1)d = 15' + 6' \times 30 = 195'$ und $S = (a+\omega) \times \frac{n}{2} = (15+195) \times \frac{7}{2} = 735$ die gesuchte Höhe.

Anmerk. Eben so läßt sich finden, um wie viel Schuhe sich die Bombe in der 2ten, 3ten, 4ten Sekunde u. s. w. der Erde genähert habe, wenn nur 2, 3 oder 4 ꝛc. als das letzte Glied angenommen werden. Wenn aber die Bombe auf einer ebenen Fläche unter einem schiefen Winkel in die Höhe geworfen würde, so würde sie eine ganze Parabel beschreiben, und dann müßte die halbe Zeit von der, welche sie vom Mörser an bis auf die Erde herab brauchte, als n angenommen werden, um die Höhe der Parabel zu bestimmen.

3te Aufg. Eine allgemeine Formel für die Summe der natürlichen Zahlenordnung 1, 2, 3, 4, 5, ꝛc. finden.

Aufl. In dieser Progreßion ist $a = 1$, und $d = 1$: folglich $\omega = a + dn - d = 1 + n - 1 = n$.

Wenn wir also in der Formel $S = \frac{an + \omega n}{2}$ für n $= \omega$, und für $a = 1$ setzen: so wird

$$S = \frac{\omega + \omega^2}{2}.$$

Die Summe einer Reihe von 12 in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Gliedern wäre also

$$= \frac{144 + 12}{2} = \tfrac{156}{2} = 78.$$

Anmerk. Auch wenn die Reihe von 0 anfängt, z. B. 0, 1, 2, 3, 4 — — passet die Formel noch. Denn weil alsdann $w = dn - d$ (§. 128. b.) so ist $w = n - 1$, und $n = w + 1$. welches in der Formel $s = (a + w)\frac{n}{2}$ (weil hier $a = 0$) $= (0 + w) \times \frac{w+1}{2} = \frac{w^2 + w}{2}$ giebt. Bey einer Reihe von 12 in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Zahlen, wenn das erste Glied $= 0$, ist also das letzte $w = n - 1 = 11$, und folglich $s = \frac{11^2 + 11}{2} = \tfrac{132}{2} = 66$.

Die übrigen Formeln, welche aus den §. 126. a. und §. 128. a. durch Kalkuliren herausgebracht werden, sind in P. Mako comp. Inst. Math., Ign. Pikel Elem. Arithm. et Algeb. 246 u. a. besonders in Christ. Hellwigs Anfangsgr. der allgem. Mathematik und Arithm. §. 389. u. ff. zu finden. Wer die Lehre der figurirten oder vieleckichten Zahlen zu wissen verlangt, kann sie in eben diesen Anfangsgr. des Hrn. Hellwigs §. 398. u. ff. kurz beysammen haben. Mehr davon schreibt Hr. Euler in seiner vollst. Anl. zur Alg. *III.* Absch. 5. Kap. Schirmer in seiner selbstlehrenden Alg. Mahlers Alg. u. a.

§. 136.

Wenn das erste Glied einer geometrischen Progression $= a$; der Exponent $= q$; so ist die allgemeine Formel

I.	II.	III.	IV.	V.	N.
a :	aq :	aq^2 :	aq^3 :	aq^4 ——	aq^{n-1}

a) In dieser Progreßion ist der Exponent des Verhältnisses q im ersten Gliede = 0, im 2ten = 1, im 3ten = 2 u. s. w. und es sind daher in einer jeden geometrischen Progreßion zweyerley Exponenten: der Exponent des Verhältnisses, und der Exponent der Würde, zu welcher der Exponent des Verhältnisses erhoben ist.

b) So wie die Verhältnisse selbst, gehen auch die Exponenten der Würde von 0 aus nach der natürlichen Zahlenorduung fort, und sind 0, 1, 2, 3 —— darum sie auch Verhältnißzähler (Logarithmi) genennt werden.

c) Wenn in der allgemeinen Formel $a = 1$; $q = 2$; so ist die Progreßion wachsend

$$1 : 2 : 4 : 8 : 16 ——$$

ist aber $q = \frac{1}{2}$; so wird sie abnehmend

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} ——$$

§. 131.

Es erhellet schon aus der allgemeinen Formel, daß, weil bey einem jeden Gliede der Exponent der Würde um 1 weniger ist, als die Zahl der Glieder, das letzte Glied seyn müße:

$$\omega = aq^{n-1}$$

Aus

a) Aus diesem wird wieder

$$a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$$

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$$

§. 132.

1) Das Produkt der zwey äußersten Glieder ist in jeder geometrischen Progreßion = dem Produkte jeder zwey gleichweit davon abstehenden, und

2) Dem Quadrate des mittleren, wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist.

Dieß zeigt zwar wieder die allgemeine Formel (§. 130.) denn in derselben ist offenbar

$$\begin{array}{ccc} I \times V & II \times IV & III^2 \end{array}$$

$$a \times a\,q^4 = a\,q \times a\,q^3 = (a\,q^2)^2 = a^2\,q^4$$

Doch kann es wieder allgemeiner also bewiesen werden.

1. $a \times \omega$ oder $a \times a\,q^{n-1} = a^2\,q^{n-1}$ das nächste an a ist $a\,q$, an ω zurück $a\,q^{n-2}$, wie sich leicht aus §. 126. b. schließen läßt. Nun ist aber auch

$$a\,q \times a\,q^{n-2} = a^2\,q^{n-2+1} = a^2\,q^{n-1}$$

folglich in $a \times \omega = a\,q \times a\,q^{n-2}$

2) Das mittlere Glied, welches auch hier $\frac{n-1}{2}$ Glieder vor, und eben so viel hinter sich hat, wie §. 126. c. muß für ihren Exponenten $q^{\frac{n-1}{2}}$ haben, also $= a\,q^{\frac{n-1}{2}}$ seyn: Es ist aber dessen Quadrat

=

$= a^2 q^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \times 2 = a^2 q^{\frac{2n-2}{2}} = a^2 q^{n-1}$: folglich ist $a \times \omega = (a q^{\frac{n-1}{2}})^2$, oder dem Quadrate des mittleren.

§. 133.

Die Summe einer geometrischen Progreßion, oder

$$s = \frac{\omega q - a}{q - 1}.$$

D. i. dem letzten Gliede mit dem Exponenten multiplizirt — dem ersten, und mit dem Exponenten — 1 getheilt.

Bew. Nach (§. 110. a) verhält sich in einer stettigen Proportion, und folglich auch in einer Progreßion, die Summe aller Vorderglieder zu der Summe aller Hinterglieder, wie das erste zum zweyten: oder

$$s - \omega : S - a = a : a q$$

nach §. 105. $\quad a s q - a \omega q = a s - a^2$

$: a \quad s q - \omega q = s - a$

$+ \omega q \quad s q = \omega q + s - a$

$- s \quad s q - s = \omega q - a$

$: q - 1 \quad s = \dfrac{\omega q - a}{q - 1}$

a) Es ist also wieder

$$a = \omega q + s - s q$$

$$\omega = \frac{s q - s + a}{q} = s + \frac{a - s}{q}$$

$$q = \frac{s - a}{s - \omega}$$

b) Weil $\omega = a q^{n-1}$ ist, so kann in der Formel $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ für ω, $a q^{n-1}$ gesetzt werden; dann wird $s = \frac{a q^{n-1+1} - a}{q - 1} = \frac{a q^n - a}{q - 1} = \frac{(q^n - 1)}{q - 1} \times a$, daraus sich wieder (wie §. 128. b.) a, q, ω, n, s, jede zwey fehlenden Größen finden lassen: Nur n wird eigentlich nicht, außer vermittelst der Logarithmen gefunden. Z. B. a sey $= 1$; $q = 2$; $n = 7$. ω und s werden gesucht: so ist $\omega = a q^{n-1} = 2^6 = 2^2 \times 2^4$, (wie aus §. 52. folgt.) $= 64$. s aber $= \frac{q^n - a}{q - 1} = 2^7 - 1 = 2^2 \times 2^4 \times 2^1 - 1 = 4 \times 16 \times 2 - 1 = 127$.

Anmerk. Ich übergehe wieder die übrigen Formeln, welche aus den bisherigen entstehen, weil sie Anfängern nicht eben so nothwendig sind. Sie mögen in der §. 129. letzten Anmerkung genennten Schriftstellern aufgesucht werden.

III. Abschnitt.

Von den Logarithmen.

§. 134.

Wenn in der geometrischen Progreßionsformel $a = 1$, und also die Progreßion nur mit dem Exponenten des Verhältnisses allein ausgesetzt wird, so stehet sie also:

q

$q^0, q^1, q^2, q^3, q^4 -- q^m, q^{m+1}, q^{m+2}$ -- oder
$1, q^1, q^2, q^3, q^4 -- q^m, q^{m+1}, q^{m+2}$ --
Wo 0 der Logarithme von 1; 1 der Logarithme von q; 2 von q^2; m von q^m; $m+1$ von q^{m+1} u.s.f.

§. 135.

Wird also auf eine geometrische Progreßion, die von 1 anfängt, eine arithmetische der natürlichen Zahlen von 0 aus gesetzt, so sind die Glieder von dieser allemal die Logarithmen der korrespondirenden Glieder von jener, es möge das 2te Glied seyn, wie es wolle. Z. B. es sey $q = 10$, so sind die Progreßionen
$0, 1, 2, 3, 4, -- m, m+1, m+2$ --
$1, 10, 100, 1000, 10000 -- 10^m, 10^{m+1}, 10^{m+2}$ --
-- Wo 0 der Logarithme von 1; 1 von 10; 2 von 100 -- m von 10^m, $m+1$ von 10^{m+1} ist.

a) Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 sind eigentliche Brüche: die zwischen 10 und 100; zwischen 10^m und 10^{m+1} aber gemischte Brüche, ꝛc. oder mittlere arithmetische Proportionalen, d. i. Exponenten der mittleren geometrischen Proportionalgrößen. Z. B. zwischen 10^m und 10^{m+1} wäre die mittlere geometrische Proportional $= \sqrt{10^{2m+1}} = 10^{\frac{2m+1}{2}}$ (§. 105. a.): So ist zwischen m und $m+1$ die mittlere arithmetische auch $= \frac{2m+1}{2}$ (§. 101. a.). Es wäre also dieß der Logarithme von $10^{\frac{2m+1}{2}}$. Eben so ist die mittlere arithmetische Proportional zwischen

$\frac{2m+1}{2}$ und $m+1$ der Logarithme der mittleren geometrischen Proportional zwischen $10^{\frac{2m+1}{2}}$, und 10^{m+1} u. s. w.

b) Will man die Reihe von einem Bruche: z. B. von $\frac{1}{1000}$ anfangen; so wird sie
$\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, 1, 10, 100, 1000 D. i. (§. 51.)
$10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^{0}, 10^{1}, 10^{2}, 10^{3}$ — —
Wodurch sich offenbar zeigt, daß die Logarithmen der Brüche negativ seyn: und wechselweise, daß negative Logarithmen allemal Brüche bedeuten müssen.

§. 136.

Man setze nun jeder Reihe des vorherg. §. überall 7 Nullen zu; so werden folgende daraus:
0,0000000; 1,0000000; 2,0000000; 3,0000000, - -
1,0000000; 10,0000000; 100,0000000; 1000,0000000
— —

Wo in der obern Reihe die Logarithmen aus der Kennziffer 0, 1, 2, 3 u. s. w., und einem Bruche bestehen, der Bequemlichkeit halber, als ein Dezimalbruch ausgedrückt wird; deßwegen aber aus 7 Dezimalen, oder Nullen besteht, damit die mittleren Proportionalen desto genauer bestimmet werden können.

a) Alle Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 sind also in den Logarithmentabellen unter der Kenn-

ziffer

ziffer (charactristica) o: die Logarithmen aller Zahlen zwischen 10 und 100, unter der Kennziffer 1: zwischen 100 und 1000, unter der Kennziffer 2 zu suchen. Wechselweise, wenn der Logarithme die Kennziffer 2 hat, ist seine Zahl unter den Hunderten: hat er die Kennziffer 1, unter den Zehnern: hat er o, unter den Einsern zu finden: und man pflegt die Zahlen 1, 10, 100, 1000 ꝛc. Hauptzahlen zu nennen.

b) Wird die Kennziffer des Logarithmus um 1 vermehret, oder vermindert, so zeigt er zehnmal mehr, oder weniger Theile, als vormals an: darum muß auch seine Zahl mit 10 multiplizirt, oder dividirt werden, wenn die Kennziffer des Logarithme um 1 vermehrt, oder vermindert wird: und umgekehrt. So ist

0, 0000000 = L. 1 aber 0 + 1, 0000000 = L. 10
0 — 1, 0000000 = L. 0, 1.
1, 0413927 = L. 11 aber 1 + 1, 0413927 = L. 110
1 — 1, 0413927 = 1, 1 ꝛc.

c) Aus dem nämlichen Grunde giebt der Logarithme einer Zahl, wenn er unter seiner Kennziffer nicht zu finden ist, sondern unter einer, die um 1 größer ist, 10mal kleinere Theile: ist er erst unter einer, welche um 2 größer ist, 100mal kleinere u. s. w. Z. B. der Logarithme 0, 2013971 ist weder unter der Kennziffer 0, noch 1, sondern erst unter 2 anzutreffen, wo ihm die Zahl 159 entspricht. Werden nun geometrische Ruthen verlangt, so sind hier nicht nur in der ersten Ziffer Ruthen, sondern auch in der 2ten Schuhe,

in der 3ten Zolle, oder $1°, 5', 9'' = 1°5'9'' = 159''$ gefunden, und also das Maaß 100mal genauer bestimmt.

Anmerk. Ich will hier kurz die Methode anzeigen, auf welche die Logarithmen für die Zahlen zwischen 1 und 10 gefunden worden. Z. B. für die Zahl 9 mußte man so verfahren: Man suchte zwischen 1 und 10 oder 1, 0000000, u. 10, 0000000 die mittlere geometrische Proportionalgröße = 3, 1622777 zwischen ihren Logarithmen 0, 0000000, und 1, 0000000 = 0, 5000000 aber die mittlere arithmetische. Weil nun die mittlere geometrische Proportional 3, 162 — — für 9 zu klein ist, so sucht man jetzt eine zwischen 3, 1622777 u. 10, 0000000 = 5, 6234132: dann auch eine arithmetische zwischen 0, 5000000 u. 1, 0000000 = 0, 7500000 rc. So fährt man so lange fort, bis zuletzt 9, 0000000 als die mittlere geometrische, und 0, 95424251 als die mittlere arithmetische Proportionalgröße herauskommen, welche letzte etwas größer ist, als 9, doch weniger als um $\frac{1}{10000000}$. Hier ist die Tabelle von allen mittleren Proportionalen, die von 1 aus bis auf 9 gefunden werden müssen.

Mitt-

	Mittlere geometrische Proportionalzahlen.	Mittlere arithm. Proportionalzahlen, oder Logarithmen.
A	1, 0000000 —	0, 00000000
B	10, 0000000 —	1, 00000000
C	3, 1622777 —	0, 50000000
D	5, 6234132 —	0, 75000000
E	7, 4989421 —	0, 87500000
F	8, 6596432 —	0, 93750000
G	9, 3057204 —	0, 96875000
H	8, 9768713 —	0, 95312500
I	9, 1398170 —	0, 96093750
K	9, 0579777 —	0, 95703125
L	9, 0173333 —	0, 95507812
M	8, 9970796 —	0, 95410156
N	9, 0072008 —	0, 95458983
O	9, 0021388 —	0, 95434570
P	8, 9996088 —	0, 95422363
Q	9, 0008737 —	0, 95428467
R	9, 0002412 —	0, 95425415
S	8, 9999250 —	0, 95421889
T	9, 0000831 —	0, 95424652
V	9, 0000041 —	0, 95424271
X	8, 9999650 —	0, 95424080
Y	8, 9999845 —	0, 95424217
Z	8, 9999943 —	0, 95424223
a	8, 9999992 —	0, 95424247
b	9, 0000016 —	0, 95424259
c	9, 0000004 —	0, 95424253
d	8, 9999998 —	0, 95424250
e	9, 0000000 —	0, 95424251

Ist einmal der Logarithme für 9 gefunden, so wird im folgenden §. gezeigt werden, daß, weil $3 = \sqrt{9}$; $L\,3 = \frac{L\,9}{3}$.
L 3

L 3 + 1 = L 30. L 3 + 2 = L 300 rc. seyn müsse. Eben so ist L 9 + 1 = L 90. L 9 + 2 = L 900. Auch lassen sich für alle Würden von 3 und 9 die Logarithmen nach der Lehre des folgenden §. finden. Z. B. Weil $3^3 = 27$: so ist 3 L 3 = L 27: Weil $9^2 = 81$: so ist 2 L 9 = L 81 u. s. w. Aber für die Primzahlen 7, 11, 13, u. s. die aus keinen Faktorn, außer sich selbst, und der Einheit bestehen, müßten die Logarithmen auf die angeführte mühesame Art gesucht werden.

§. 137.

1) Weil die Logarithmen nichts anders als Exponenten der Würden sind; so werden 1) zwo, oder mehrere Größen in einander multiplizirt, wenn man ihre Logarithmen addirt: dividirt, wenn man den Logarithme des Divisors von dem des Dividends abziehet. (§. 49.) D. i.

$$\text{I. } ab = La + Lb.$$

$$\text{II. } \frac{a}{b} = La - Lb$$

2) Wird eine Größe zur beliebigen Würde m erhoben, wenn man den Logarithme der Größe mit dem Exponenten m multiplizirt: eine Wurzel n ausgezogen, wenn man den Logarithme der Größe mit dem Exponenten n der Wurzel dividirt: (§. 52.) d. i.

$$\text{I. } a^m = m\,La$$

$$\text{II. } \sqrt[n]{a} = \frac{La}{n}$$

a) Nach dem 1ten Satz dieses §. I. ist 22 × 9 = L 22 + L 9 = 0, 9542425 + 1, 3424227 =

2,

2, 2966652, welchem Logarithme genau 198, als das Produkt von 22 × 9 respondirt. Nach dem 2ten Saze I. ist $9^3 = 3 L 9 = 0, 9542425 \times 3 = 2, 8627275$, dem genau 729, als die 3te Würde von 9 respondirt: Nach II. aber ist $\sqrt[4]{1296} = L \frac{1296}{4} = \frac{L 432 + L 3}{4}$ $= \frac{2, 6354837 + 0, 4771213}{4} = 0, 7781515$, welchem beynahe 6, als die wahre Wurzel respondirt: Daß aber die wahre Wurzel nicht genau herauskomme, rührt daher, weil man nur mit Stücken der Logarithmen rechnet.

b) Ueberhaupt ist I. $L\left(a + \frac{b}{c}\right) = L\left(\frac{ac + b}{c}\right)$ $= L(ac + b) - L c$

$$\text{II. } L \frac{ab}{c} = L a + L b - L c.$$

$$\text{III. } L \sqrt[n]{\frac{a^m b}{c d^r}} = \frac{m}{n} L a - \frac{r}{n} L d + \frac{L b - L c.}{n}$$

§. 138.

1) Brüche werden als Divisionen angesehen; um also den Logarithme eines Bruches zu finden, wird nur der Logarithme des Nenners von dem des Zählers algebraisch abgezogen: d. i. man zieht den Logarithme des Zählers von dem des Nenners ab, und macht den Rest verneinend: so ist $L \frac{4}{5} = L 4 - L 5 = -(L 5 - L 4) = - 0, 0969100$. Im Gegentheile folgt sowohl aus diesem, als aus (§. 135. b.), daß die respondirende Zahl vom Logarithme $- 1, 8325089$ ein

ein Bruch $= \frac{1}{68}$ seyn müsse, und daß man selbe überhaupt erhalte, wenn nur auf die dem Logarithme respondirende Zahl 1 als der Zähler des Bruches gesetzt wird.

2) Ein Dezimalbruch z. B. 0, 68 ist $= \frac{68}{100}$: Es ist aber L $\frac{68}{100}$ = L 68 — L 100 = 1, 8325089 — 2, 0000000 = — 1, + 8325089, wenn nur die Kennziffer allein abgezogen wird. Daraus dann wieder folgt, daß, wenn nur die Kennziffer des Logarithme negativ ist, die dem ganzen Logarithme entsprechende Zahl der Zähler: die dem positiv gemachten und um 1 vermehrten Kennziffer entsprechende Hauptzahl aber der Nenner des Bruches sey, den der Logarithme anzeigt. Der entsprechende Bruch von — 1, + 8325089 ist $\frac{68}{100}$ = 0, 68.

a) Gemischte Brüche werden nach (§. 42. b.) in unächte verwandelt, und dann damit, wie mit andern verfahren. Z. B. L 3 $\frac{5}{16} = \frac{53}{16}$ = L 53 — L 16 = 0, 5201559. L 3, 25 = L $\frac{325}{100}$ = 2, 5118834 — 2, 0000000 = 0, 5118834.

§. 139.

Wenn man die Unterschiede zweener Logarithmen mit dem Unterschiede ihrer entsorechenden Zahlen vergleichet, so stehen sie zwar, falls von kleinen Zahlen die Rede ist, in keinem Verhältnisse, aber bey großen Zahlen ist der Fehler oft unmerklich: oft gar keiner. Zum Beweis dessen sey

L

L 669 =	2, 8254261	L 669 =	2, 8254261
— L 668 =	2, 8244765	— L 665 =	2, 8228216
Untersch. 1	6496	4	26045

Da nun die Unterschiede der Zahlen sind, wie 1 : 4; die der Logarithmen, wie 6496 : 26045, und weil hier der Exponent nicht = 4, sondern = $4\frac{61}{6496}$ ist, so sieht man, daß hier die Proportion nicht ganz richtig sey: aber

L 8236 =	3, 9157163	L 8236 =	3, 9157163
— L 8235 =	3, 9156636	— L 8234,	3, 9156109
1	527	2	1054

Wo genau 1 : 2 = 527 : 1054: weil überall der Exponent = 2 ist.

§. 140.

1) Wird nun für eine Zahl der Logarithme verlangt, welche nicht in Faktorn getheilt werden kann, (denn hernach darf man nur nach §. 137. a. verfahren) und größer ist, als die größte in den Tafeln. Z. B. 184361: so wirft man so viele Ziffer weg, hier nämlich 361, daß die zurückbehaltenen, 184, noch in den Kennziffern oder Tafeln gefunden werden können: setzt aber zu 184 so viel Nullen, als Ziffer weggelassen worden, und sagt nach vorherg. §.: Wie sich die Differenz von 184000, und 185000 zu der Differenz ihrer Logarithmen verhält (daß den Kennz. der Log. von 184 und 185 . 3 addirt werden müssen, ist aus §. 136. b. bekannt) also verhält sich auch die

Dif-

Differenz zwischen 184361, und 184000 = 361 zu der Differenz ihrer Logarithmen: oder 185000 — 184000 : L 185000 — L 184000 = 184361 — 184000 : x

1000 : 5, 2671717 — 5, 2648178 = 361 : x

$x = \frac{23539 \times 361}{1000}$ = 8497 den Bruch weggelassen; welches dem Logarithme von 184000 addirt, 5, 2656675 als den Logarithme von 184361 wenigst beynahe giebt.

2) Im Gegentheile, wenn ein Logarithme z. B. 2, 9670379 in den Tafeln nicht stehet, so fehlt nur noch ein Bruch über die Zahl, welche dem nächst kleinern Logarithme respondirt: Man findet ihn, indem man also schließt: Wie die Differenz des nächst kleinern und nächst größern Logarithme in den Tafeln, zwischen welchen der gegebene liegt, zu der Differenz ihrer entsprechenden Zahlen: also ist die Differenz des nächst kleinern Logarithme vom gegebenen, zu der Differenz ihrer entsprechenden Zahlen, oder 2, 9670797 — 2, 9666110 : 927 — 926 = 2, 9670379 — 2, 9666110 : x

14687 : 1 = 4269 : x

$x = \frac{4299}{4687}$

Werden nun zum 2ten Glied der Proportion zween Nullen gesetzt, so erhält man die Zahl in hundert Theilen: und es wird

$x = \frac{4269 \times 100}{4687}$ = 0, 91

Wel-

Welche der Zahl des nächst kleinern Logarithme addirt, 926, 29 als die verlangte Zahl des gegebenen Logarithme ist.

Anmerk. Ich bin in der bisher vorgetragenen Lehre der Logarithmen meistens des Hrn. Hofraths Kästners, und Hrn. Prof. Hellwigs Anfangsgründen der Arithm. gefolget. Anfängern mögen aber wohl noch Schirmers selbstlehrende Algebra 2te Abtheilung u. folg. — Mathem. Lehrbuch 1ter Theil zum Gebrauch des joachimthal. Gymn. Eberts nähere Unterweisung in den philos. und mathem. Wissensch. §. 120. u. ff. De la Caille *Elem. Alg.* 334. ꝛc. u. a. immer gute Dienste leisten. Hr. Prof. Karstens II. Theil, VI. und VII. sind denen besonders zu empfehlen, welche ihre Kenntnisse über diese in der Mathematik so wichtige Lehre erweitern wollen. Noch etwas von den hieher gehörigen Gleichungen. §. 139.

§. 141.

Es folgt schon aus der Natur der Gleichung, daß, wenn man auf der einen Seite einer Gleichung mit Logarithmen rrchnet, dieß auch auf der andern Seite geschehen müße. Ich will die Sachen nur durch Aufgaben zeigen.

§. 142.

1te Aufg. Nach Muschenbröcks Bestimmung (siehe Schulzens **neue erweiterte Samml. logarithmischer u.a. Tafeln** S. 312.) verhält sich das Gewicht des reinen Zinns zu den des Kupfers, wie 7320 : 9000. Nun ist eine zinnerne Kugel 1 $\frac{1}{2}$ ℔. schwer gegeben: man fragt, wie schwer eine gleichgroße von Kupfer seyn würde.

7320

$$7320 : 9000 = 1\tfrac{1}{2} : x$$

$$:10 \quad 732 : 900 = \tfrac{3}{2} : x$$

$$2,8645111 : 2,9542425 = 0,1760913 : x$$

$$x = 2,9542425 + 0,1760913 - 2,8645111 = 0,2658227$$

Welcher zwischen den Log. der Zahlen 184 und 185 liegt: Nun sage ich:

$$\begin{array}{rcl} 2,2671717 : 185 & = & 2,2658227 \\ -\ 2,2648178 - 184 & = & -2,2648178 \;:x \\ \hline 23539 : 100\ (\S.140.2.) & = & 10049 : x \end{array}$$

$$x = \frac{1004900}{23539} = 0,42$$

Welches zu 1, 84 addirt 2, 26 ℔. giebt.

a) Also kann man jede 4te Proportional durch Logarithmen suchen. Soll zu a und b die mittlere Proportional gefunden werden, so ist (§. 105. a.)

$$a : x : b$$

und $\quad x^2 = a\,b$

folg. mit Log. $2\,L\,x = L\,a + L\,b$.

Wird aber zu a und b die 3te Proportionalgröße begehrt: so ist $a : b : x$, und $x = \frac{b^2}{a}$. Mit Logarith. $L\,x = 2\,L\,b - L\,a$.

§. 143.

2te Aufg. Zu was für einer Würde soll 2 erhoben werden, damit es 8192 gebe.

Aufl. $\quad 2^x = 8192$

$$x\,L\,2 = L\,8192$$

$$x = \frac{L\,8192}{L\,2} = \frac{3,9133899}{0,3010300} = 12,99,$$

welches beynahe = 13, und wirklich ist 2^{13} beynahe = 8192: Warum aber nicht genau 13 herauskomme, ist schon §. 137. a. angezeigt worden.

a) Gesetzt, man verlangte, was für eine Wurzel aus 4096 = 8 sey, so wäre $\sqrt[x]{4096} = 8$ folglich $\frac{L\,4096}{x} = L\,8$ und endlich $x = \frac{L\,4096}{L\,8} = \frac{L\,512 + L\,8}{L\,8}$

$$= \frac{3,6123600}{0,9030900} = 4.$$

Anmerk. Ueberhaupt lassen sich die Gleichungen, in denen die unbekannte Größe in dem Exponenten einer unbekannten bestehet, nur durch Hilfe der Logarithmen auflösen. Ich will daher alle Fälle hersetzen, deren weitere Erläuterung in den Vorlesungen gemacht werden soll.

§. 144.

1) Wenn I $a^x = P$: so ist $x = \frac{LP}{La}$

II $a^{x+m} = P$ - - $x = \frac{LP}{La} - m$

III $a^{x-m} = P$ - - $x = \frac{LP}{La} + m$

IV $a^{xm} = P$ - - $x = \frac{LP}{mLa}$

V $a^{x:m} = P$ - - $x = \frac{mLP}{La}$

2)

2) Wenn aber $\sqrt[x]{a} = P$: so ist $x = \frac{La}{LP}$

$$\sqrt[x+m]{a} = P \; - - - \; x = \frac{La}{LP} - m$$

$$\sqrt[x-m]{a} = P \; - - - \; x = \frac{La}{LP} + m$$

$$\sqrt[xm]{a} = P \; - - - \; x = \frac{La}{mLP}$$

$$\sqrt[x:m]{a} = P \; - - - \; x = \frac{mLa}{LP}$$

§. 145.

3te Aufg. Die Zahl der Glieder einer geometrischen Progreßion finden.

1te Aufl. Weil $aq^{n-1} = \omega$ (§. 131.) so ist

$: a \qquad q^{n-1} = \frac{\omega}{a}.$

$(n-1)\, Lq = L\omega - La.$

$: Lq \qquad n - 1 = \frac{L\omega - La}{Lq}$

$+ 1 \qquad n = \frac{L\omega - La}{Lq} + 1.$

2te Aufl. Nach (§. 133. b.) ist $S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$;

Folglich $\quad aq^n - a = qS - S$

$+ a \qquad aq^n = qS - S + a$

$: a \qquad q^n = \frac{qs - S + a}{a}$

und $\qquad nLq = L(qs - S + a) - La.$

; L

$:Lq \qquad n = \frac{L(qs - S + a) - La}{Lq}.$

a) Wenn daher in einer geometrischen Progreßion $a = 2;\ q = 3;\ S = 242$, so ist

$$n = \frac{L(240 \times 2 - 240 + 2) - L2}{L3} =$$

$$= \frac{L242 - L2}{L3} = \frac{2,3838154 - 0,3010300}{0,4771213} = 5$$

beynahe.

Anmerk. Die Erfindung der Logarithmen wird insgemein dem Johann Neper Baron von Merchiston einem Schottländer zugeeignet, der sie im Jahre 1614 zu Edinburg in seinem Canone mirifico Logarithmorum zuerst bekannt gemacht haben soll: obschon andere (S. Klemms mathem. Lehrb. §. 679. u. ff.) dem Jost Byrge diese Ehre einräumen, von welchem Keppler in tabulis Rudolphinis c. 3. p. 11. sagt, daß er zwar in den mathematischen und besonders astronomischen Wissenschaften wohl bewandert gewesen sey: doch aber seine Geheimnisse, vorzüglich aber die Erfindung der Logarithmen, immer verborgen gehalten habe.

Wie aber, wenn auch mein Vaterland einen Mann aufzuweisen hätte, der auf die Ehre dieser Erfindung Anspruch machen könnte? Ich muß nur aus Karamuels Mathes. bic. et noua eine Stelle anführen, in welcher er ausdrücklich unsern Graf Herwart von Hohenburg als den Erfinder angiebt, und aus einem Briefe, den Herwart an Tycho Brahe geschrieben, beweiset. T. II. Syntagm. 8. Art. X. Num. 94. Hier sind seine Worte: De horum numerorum artificialium (Logarithmorum) inuentore nemo disputat; nam fuisse Neperum supponunt. At dubitare incipiet, qui Tychonis vitam scriptam a Petro Gassendo recenseat: ipse enim lib. I. p. 455. a. asserit: Ioannem Herwartum Duci Bauariae a secretis consiliis scripsisse Tychoni: *Nihil morari se soluendi cuiusquam Trianguli difficultatem multiplicationum, ac diuisionum vice additiones, et subtractiones vsurpare.* Quod quidem fieri posse ait Gassen-

dus: docuit postmodum suo Logarithmorum Canone Neperus. Herwartus ergo iam ante Neperum Logarithmos inuenerat. Also Karamuel. Vielleicht sind auch die großen arithm. Tabellen dieses Herwarts, die schon 1610, also 4 Jahre vor dem neperischen Kanon gedruckt worden, und in welchen er die logarithmische Rechnungsvortheile der Multiplikation und Division, durch Addition und Subtraktion auch in Rücksicht auf die ganze Trigonometrie zeigt, ein Beweis für Karamuels Meynung. Freylich sind sie noch keine eigentliche Logarithmentabellen; aber wenn doch Herwart wenigst der erste gewesen wäre, der den Gedanken gehabt hätte, Zahlen aufzusuchen, welche die Vortheile der Logarithmen verschaffen: könnte er nicht mit Rechte auf die Ehre der Erfindung Anspruch machen, ob sie schon erst ein anderer nach ihm vollkommen zu Stand gebracht hatte? Doch meine Absicht war hier nur das Zeugniß des Karamuels anzuführen, und das Urtheil davon dem gelehrten Publikum zu überlassen.

Auch die Logarithmen, die wir heut zu Tage haben, sind nicht von Neper, sondern vom Heinr. Brigg Prof. zu Oxfort, welcher sie 1624 in seiner Arithmetica logarithmica herausgegeben, und bis auf 20000 berechnet hat. Vlacq hat 1628 auch die bis 90000 hinzugethan. Weil aber diese Tafeln gar zu groß und unbequem waren, so sind 1665 von eben diesem Vlacq kleinere, die nur bis auf 10000 gehen, und 1711 von dem Freyherrn v. Wolf einige dergleichen herausgekommen, wovon Vlacqs seine für die korrektesten gehalten werden. Den ersten Rang verdienen ohne Zweifel Scherwins mathematical Tables, die zu London 1705 das erstemal aufgelegt worden, heut zu Tage aber im Deutschlande schwer zu haben sind. Hr. Karl Schulze hat diese 1778 nebst andern Tafeln zu Berlin in zween Bänden neu herausgegeben. Der Titel dieses aller Empfehlung würdigsten Werkes ist: **Joh. Karl Schulze ꝛc. neue und erweiterte Sammlung logarithmischer und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln. Berlin 1778 bey Aug. Mylius Buchhändler in der Brüderstrasse.**

Viertes Hauptstück.

Von der Differential- und Integralrechnung.

I. Abschnitt.

Vom Unendlichen.

§. 146.

1) Die Gränze eines Dinges nennen wir das, über welches nichts mehr gedacht werden kann, das dazu gehört.

2) In sofern nun ein Ding Gränzen hat, ist es endlich: unendlich ist es, wenn es keine Gränzen hat.

3) Die Gränzen einer Größe können in nichts anders, als in einer bestimmten Anzahl Einheiten bestehen.

4) Jede Größe, die aus einer bestimmten Anzahl Einheiten bestehet: oder die sich angeben läßt, ist also endlich (quantitas finita); unendlich (quantitas infinita) ist nur jene Größe, welche aus so einer bestimmten Anzahl Einheiten nicht bestehet: sondern größer ist, als jede, die sich angeben läßt.

5) Unendlich klein (quantitas infinite parua, infinitesima) würde daher eine Größe seyn, welche

kleiner als jede angebliche wäre (quauis dabili et aſsignabili minor).

a) Da jede Größe, die iſt, ſich angeben läßt, und beſtimmt iſt; ſo kann eine unendliche Größe nie wirklich vorhanden ſeyn: wer ſich daher eine ſolche, als etwas wirklich exiſtirendes vorſtellt, denkt ſich etwas widerſprechendes.

Anmerk. Die Meynungen von den Unendlichkleinen waren bisher ſehr verſchieden. Einige hielten ſie als etwas blos Eingebildetes: andere mit Hrn. Euler gar für Nichts. Hingegen vergleicht ſie der Freyherr v. Wolf nur mit Sandkörnchen, die man bey Meſſung eines Berges ohne Gefahr zu irren weglaſſen kann: und andere wohl gar für wirkliche unendlichkleine Dinge. Hr. Hofrath Käſtner, deſſen außerordentlichen Verdienſte in der Mathematik entſchieden ſind, hat uns die beßten Begriffe davon geliefert. Ich werde mich alſo bemühen, ſie ſo deutlich, als es möglich iſt, vorzutragen.

§. 147.

Eine jede Würde von 2 iſt größer als ihr Exponent: man mag 2 ſo weit erheben, als man will.

Bew. Daß $2^1 > 1$ ꝛc.; iſt einleuchtend. Wenn nun auch $m > 1$; ſo iſt

	$2^m > m$
folglich $2 \times$	$2^{m+1} > 2m$ (§. 7. 2.)
nun iſt ſchon	$m > 1$
alſo	$2m > m + 1$
folglich noch mehr	$2^{m+1} > m + 1$.

§. 148.

§. 148.

Eine bestimmte Größe a kann durch immer fortgesetzte Halbirungen endlich kleiner werden, als jede angebliche kleinste Größe c.

Bew. Man nehme eine dritte Größe m so groß an, daß die kleinste c mit ihr multiplizirt a gleich, oder $mc = a$ werde, welche allzeit möglich ist; indem man m so groß annehmen kann, als man will: so ist

$$a = mc$$

und $\frac{a}{m} = c$

aber $2^m > m$ (vorherg. §.)

also wegen den größern Nenner $\frac{a}{2^m} < \frac{a}{m}$

folglich weil $\frac{a}{m} = c$. $\frac{a}{2^m} < c$

Anmerk. Schon Euklides Elem. X. Prop. I. hat diesen Beweis gegeben, und daraus die Lehre vom Unendlichkleinen hergeleitet. Von unsern Mathematikern ist er fast durchgehends vernachläßiget worden, weil sie den Begrif des Unendlichkleinen von sich selbst schon für deutlich genug hielten. Hr. Hofrath Kästner, welcher wieder der erste war, der ihn seinen mathematischen Lehrbüchern eingerückt hat, schreibt davon in seiner Analysis endlicher Größen §. 47. also: Dieser Satz ist der wahre Grund der Schlüsse, die man jezt durch die Ausdrückungen des Unendlichkleinen abzukürzen pflegt.

a) Es ist dann allemal möglich $\frac{1}{2}$ so lange fort zu halbiren, oder eine Würde von $\frac{1}{2}$ zu finden, (das

nämliche gilt von $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und jedem andern ächten Bruche, dessen Zähler 1 ist) die kleiner ist, als jeder gegebene Bruch, oder angebliche kleinste Größe.

b) Das letzte Glied einer Reihe von dergleichen Brüchen z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ - - - kann der Nulle so nahe kommen, daß kein Unterschied mehr angeblich ist: d. i. das letzte Glied nimmt unendlich ab, verschwindet, wird bis auf Nichts vermindert.

c) Eine unendliche Größe ist aber nie wirklich vorhanden (§. 146. a.). Man kann nicht einmal eigentlich sagen: eine Größe ist unendlichgroß, oder unendlichklein; sondern der wahre Begriff des Unendlichen erheischt, daß es ohne Ende, zu oder abnehme: und man müßte sagen: die Größe ist von der Beschaffenheit, daß sie ohne Ende wachse oder abnehme.

d) Wenn man daher etwas unendlich groß, oder unendlich klein nennt; so stellt man sich gleichsam eine Gränze vor, der sich die Größe durch beständige Vermehrung oder Verminderung immer nähert, uud nimmt diese Gränze statt der Größe in einem Zustande, den man für ihren letzten ansieht, ob es gleich wieder keinen solchen letzten giebt. Z. B. bey der abnehmenden Reihe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ (diesen §. b.) wäre o die Gränze, der sich das eingebildete letzte Glied unendlich nähert; bey der immer abnehmenden Geschwindigkeit wäre die Ruhe die Gränze 2c.

§. 149.

§. 149.

1) Wenn sich eine Größe einer andern immerfort ohne Ende nähert, so daß der Unterschied davon nach und nach kleiner wird, als jede angebliche Größe, so ist diese die Gränze von jener, die man eben deßwegen für erreicht ansieht, weil sich nun kein Unterschied dazwischen mehr geben läßt.

2) Wenn also u eine Größe, oder Faktor von a ist, der so unendlich wächst, und $Z = a u + b$; so ist

$$:a u \qquad \frac{Z}{a u} = \frac{a u + b}{a u} = 1 + \frac{b}{a u}$$

$$\text{also} \qquad \frac{Z}{a u} = 1 + \frac{b}{a u} = 1$$

D. i. weil $\frac{b}{a u}$ unendlich klein folglich zu nichts, oder zu einer Größe wird, die sich nicht mehr angeben läßt, so ist 1 die Gränze von $\frac{Z}{a u}$, und auch von $1 + \frac{b}{a u}$: die man für erreicht hält, wenn man u unendlichgroß nennt: selbst der Werth a u aber ist die Gränze von Z. Siehe Kästners Analysis unendlicher Größen §. 9.

a) Größen, deren Unterschiede unendlich klein sind, sind also gleich, weil sich wirklich kein Unterschied angeben läßt.

b) Jede unendlich kleine Größe verschwindet gegen einer endlichen; $\frac{b}{a u}$ verschwindet gegen 1. Jede

end=

endliche verschwindet gegen einer unendlichen; denn $au + b$ mit au dividirt giebt $1 + \frac{b}{au}$: d. i. die endliche wird gegen der Unendlichen unendlichklein. Daraus folgen die gewöhnlichen Sätze, die man sonst von dem Unendlichkleinen zu geben pflegt.

§. 150.

1) Endliche Größen unendlichen addirt, oder subtrahirt, vermehren und vermindern diese nicht. $\infty + 100 + c - a = \infty$. Allgemein $\infty \pm d = \infty$.

2) Eben so werden endliche Größen von unendlich kleinen weder vermehrt, noch vermindert: $20 + \frac{100}{\infty} = 20$.

Allgem. $a \pm \frac{d}{\infty} = a$.

3) Eine endliche Größe muß unendlich fortwachsen, oder unendlichmal genommen werden, um unendlich zu werden: oder $1 \times \infty = \infty$.

4) Ein Unendlichkleines muß unendlichmal genommen werden, um zu einer endlichen Größe zu erwachsen. $1 \times \infty = \infty$. $\frac{1}{\infty} \times \infty = \frac{\infty}{\infty} = 1$. $\frac{2a}{3\infty} \times \infty = \frac{2}{3}a$.

§. 151.

1) Gleichwie eine endliche Größe unendlichmal genommen, ein Unendliches: also giebt eine unendliche Größe, wenn sie unendlich fortwächst, d. i. unendlichmal

genommen, oder mit einer unendlichen multiplizirt wird, das Quadrat des Unendlichen. Man heißt es ein Unendliches der 2ten Ordnung. $\infty \times \infty = \infty^2$. Eben so giebt dieß wieder mit einem Unendlichen der ersten Ordnung multiplizirt ein Unendliches der 3ten Ordnung: $\infty^2 \times \infty = \infty^3$ ꝛc.

2) Auf gleiche Weise entstehen Unendlichkleine der ersten, zweyten, dritten und unendlichen Ordnung.

$$\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}. \quad \frac{1}{\infty^2} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^3}.$$

Anmerk. Es ist wohl zu merken, daß diese Unendliche nur wieder in dem §. 148. c und d erklärten Verstande genommen werden müssen.

§. 152.

1) Es sey a u eine unendlichwachsende Größe von verschiedenen Ordnungen; so ist

I. $a u : b = a u^2 : b u$

II. $a u^2 : b = a u^3 : b u^2$

III. $a u^n : b = a u^m : b u^{m-n}$ (wenn $+n < +m$)

wo offenbar überall das 4te Glied gegen dem 3ten verschwinden muß, wie das zweyte gegen dem ersten.

2) Wird daher statt $Z = a u + b$ (§. 149. 2.) jetzt gesetzt $Z = a u^m + b u^{m-n}$, so ist, wenn man mit $a u^m$ dividirt,

$$\frac{Z}{a u^m} = \frac{a u^m + b u^{m-n}}{a u^m} = 1 + \frac{b u^{m-n}}{a u^m} = 1 + \frac{b u^{-n}}{a}$$

$$= 1 + \frac{b}{a u^n} \text{ (§. 51.)}$$

1 ist also die Gränze, der sich $\frac{Z}{a u^m}$, und auch $1 + \frac{b}{a u^n}$ unendlich nähert: der Werth $a u^m$ aber selbst die Gränze von Z.

a) Gleichwie Endliche gegen Unendlichen (§. 150.) also verschwinden Unendliche der niederern Ordnung gegen Unendlichen der höhern.

$\infty^2 + 100\,\infty = \infty^2$. $\infty^4 + \infty^3 + a\,\infty^2 - 1000\,\infty = \infty^4$ rc. allgem. $\infty^m \pm \infty^{m-n} = \infty^m$.

b) Umgekehrt verschwinden Unendlichkleine der höhern Ordnnng gegen den der niederern.

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}. \quad \frac{1}{\infty} + \frac{100}{\infty^2} - \frac{a}{\infty^4} = \frac{1}{\infty}$$

allgemein. $$\frac{1}{\infty^{m-n}} \pm \frac{1}{\infty^m} = \frac{1}{\infty^{m-n}}.$$

Doch ist alles dieß nach §. 148. c und d zu verstehen.

Anmerk. Aus den bisherigen wird man auf die Unrichtigkeit des wolfischen Begriffes vom Unendlichkleinen schon schliessen können. Aber kann wohl ein Unendlichkleines nur etwas Eingebildetes, oder wohl gar Nichts seyn, wie Hr. Euler calc. differ. cap. III. darfürhält? Wenn $\frac{1}{\infty} = 0$, so ist $1 = 0 \times \infty$: müßte denn nicht $\infty = 0$ werden, weil in $0 \times \infty$ der eine Faktor 0 ist?

II. Ab-

II. Abschnitt.

Gründe der Differentialrechnung.

§. 153.

1) Wenn eine Größe um einen unendlichkleinen Unterschied wächst oder abnimmt, heißt dieser Unterschied ein Differential. Z. B. eine Größe x wachse um einen so unendlichkleinen Unterschied, den man durch d x ausdrückt (wo d nicht ein Faktor von x, sondern mit x zusammen nur das Zeichen des Differentials ist) so wird sie x + d x: nimmt sie um so einen ab, so wird sie x — d x, und im ersten Falle ist d x; im 2ten — d x das Differential von x.

Anmerk. Deutlichkeit halber will ich überhaupt die Lehre der Differential = und Integralrechnung mit geometrischen Figuren erläutern. Ich setze mehr nicht voraus, als die allerersten Anfangsgründe der Geometrie. Z. B. Was Parallellen; was eine Figur ꝛc. sey: daß der Innhalt eines Parallellograms A B C D (Fig. II.) das Produkt aus der Höhe A B in die Grundlinie B C oder A B × B C: der des Dreyeckes ABC aber $\frac{AB \times BC}{2}$ sey.

Wenn daher ein Punkt einer Linie (Fig. I.) x, dessen Länge ich selbst x nenne, um ein unendlichkleines Stück M m wächst, so ist dieß ihr Differential d x; war sie vorher x, so ist sie jetzt x + d x. x — d x wäre sie, wenn sie um M m kürzer geworden wäre. Eben so, wenn in der IIIten, VIten, VIIten und VIIIten Figur die Linie P M, die man auch Ordinate heißt, um einen unendlichkleinen Raum P p abwärts wächst, und nach und nach um R m länger wird, ist P p = d x das Differential von A P, die man Abscisse nennt: R m = d y das Dif-

Differential der Ordinate: M m aber ist das Differential von A C oder E C Fig. VII. und VIII.

a) Nur jene Größen haben Differentiale, welche wachsen, oder abnehmen, d. i. veränderlich sind (quantitates variabiles) nicht aber beständige, odrr immer gleiche (quantitates constantes), man drückt daher jene durch die letzten, diese wieder durch die ersten Buchstaben des Alphabets aus. Das Differential von a oder $d a = o$; und $d (a + y) = o + d y = d y$. $2o - x + 8 a^2 = - d x$.

Anmerk. So bleibt im Zirkel, und der Elypse (Fig. VII. und VIII.) wenn man sich eine von A gegen E zu abwärts wachsende Ordinate $y = PM$ vorstellt, der Diameter A E, B C immer gleich, und ist also eine beständige Größe: da hingegen die Ordinaten x und y immer verändert werden: daher diese, nicht aber der Diameter, Differentiale haben. Eben so kann in einem Parallellogram (Fig. II.) sowohl A B, als B C veränderlich seyn, und dann haben beyde Differentiale A B eines $= d x$; B C eines $= d y$: oder es wird nur B C verändert, da A B beständig bleibt, wie (Fig. IV.) und dann hat nur B C ein Differential $= d x$.

§. 154.

Das Differential einer jeden Würde ist das Produkt aus der um 1 erniedrigten Würde in ihren vorigen Exponenten, und das Differential oder

$$d (Z^n) = n Z^{n-1} d Z.$$

Bew. Es sey $Z^n = y$, so ist mit den Differentialen $y + d y = (Z + d Z)^n$, und nach §. 90. 3.

$$y + d y = Z^n + n Z^{n-1} d Z + \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2} Z^{n-2} d Z^2 + \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2} \cdot \tfrac{n-2}{3} Z^{n-3} d Z^3 - - -$$
$$- y \quad - Z^n$$

weil sie gleich sind, bleibt d y

$$dy = nZ^{n-1}\,dZ + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}Z^{n-2}\,dZ^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-3}{3}$$
$$Z^{n-3}\,dZ^3 \,---$$

Alles dividirt mit d z, wird

$$\frac{dy}{dZ} = nZ^{n-1} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}Z^{n-2}\,dZ + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}$$
$$Z^{n-3}\,dZ^2 \,---$$

Da nun $n z^{n-1}$ endlich ist: alle übrige Glieder der Reihe aber undendlichklein werden, weil sie in ein Unendlichkleines $= dz$ multiplizirt sind, so verschwinden sie gegen $n\, z^{n-1}$, oder vielmehr der Werth der ganzen Reihe, und $\frac{dy}{dZ}$ nähern sich unendlich ihrer Gränze $n\, Z^{n-1}$ (§. 149.) folglich ist

$$\frac{dy}{dZ} = n\,Z^{n-1}$$

und $\times\, dz$ $\qquad dy = n\,Z^{n-1}\,dZ = d\,(Z^n)$

Anmerk. Hr. Hofr. in Kästner Analysis unendlicher Größen §. 15. bestimmt die Verhältniß der Differentialien, indem er a^{n-1} $z = z^n$ setzt. Denn wenn beyde Größen wachsen, die erste um E, die 2te um e, welche anfangs endlich ist, nnd bis auf Nichts abnimmt; so wird $a^{n-1}\,(Z + E) = (Z + e)^n$, und $a^{n-1}\,Z + a^{n-1}\,E = Z^n + n\,Z^{n-1}\,e + \frac{n.n-1}{1.\,2}$ $Z^{n-2}\,e^2$ --- Wird nun $a^{n-1}\,Z = Z^n$ subtrahirt, und alles mit e dividirt, so bleibt $\frac{E}{e} = \frac{n\,Z^{n-1}}{a^{n-1}}$, endlich wenn $a = 1$, $\frac{E}{e} = n\,Z^{n-1}$: also $n\,Z^{n-1}$ die Gränze der Differentialien $\frac{E}{e}$: oder in der Proportion $E : e = n\,Z^{n-1} : 1$, ist $n\,Z^{n-1} : 1$ die Gränze der Verhältniß von $E : e$, welche

sich

sich jener ohne Ende nähert, weil e, folglich auch E in der Reihe ohne Ende abnimmt, ob sie schon anfangs endlich waren, welches, da es in völliger Schärfe wahr ist, so ist auch in völliger Schärfe das Differential von $Z^n = E = n Z^{n-1} e$. S. §. 15., 16., 17 rc.

a) Daraus folgt selbst wieder, daß, weil $x = x^1$, das Differential von x, oder $d x = 1 x^{1-1} d x = 1 d x$ (§. 50.) $= d x$: das von $- y$, oder $d(- y) = - d y$ seyn müße.

b) Das Differential von x^2, oder $d(x^2) = 2 x^{2-1} d x = 2 x d x$. $d(x^3) = 3 x^2 d x$. $d(x^4) = 4 x^3 d x$ - - -.

c) Auch wenn der Exponent verneinend ist, gilt der Satz. $d(x^{-3}) = - 3 x^{-3-1} d x = - 3 x^{-4} d x$. Allgem. $d(x^{-n}) = - n x^{-n-1} d x$.

d) Weil $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ (§. 51.), so ist $d\left(\frac{1}{x^2}\right) = d(x^{-2}) = - 2 x^{-3} d x$. $d\left(\frac{1}{x^3}\right) = d(x^{-3}) = - 3 x^{-4} d x$. Allgem. $d\left(\frac{1}{x^m}\right) = d(x^{-m}) = - m x^{-m-1} d x$.

e) Die Würden gebrochener Exponenten machen von der Regel keinen Ausnahm. $d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} d x = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$. $d\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} d x = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} d x$. Allgem. $d\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} d x$.

f) Wurzeln sind Würden gebrochener Exponenten (§. 52. b.) also $d(\sqrt{x}) = d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$. $d(\sqrt[3]{x^2}) = d\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} dx$. Allgemein $d\left(\left(\sqrt[n]{x^r}\right)^m\right) = d\left(x^{\frac{rn}{m}}\right) = \frac{rn}{m} x^{\frac{rn}{m}-1} dx$.

Beyspiele zur Uebung.

I. $d(x + y - Z)$

II. $d(a^2 + Z - b)$

III. $d(a + b)$

IV. $d(a^2 + x^3 - b - y^2 + Z)$

V. $d\left(\frac{1}{a + x^2}\right)$

VI. $d\left(\frac{1}{b^2 - y^2}^{\frac{1}{2}}\right)$

VII. $d\left(a + y - \frac{1}{\sqrt{x^n} + ab}\right)$

VIII. $d\left(Z^2 + \frac{1}{x^5 - \sqrt[\frac{3}{5}]{y}}^{\frac{1}{3}}\right)$

IX. $d\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x^{m+n}}}\right)$.

Anmerk. Daß oft aus zwo veränderlichen Größen eine wachsen könne, da die andere abnimmt, zeigt die Vte Fig. Denn, wenn A P die Abscisse x ist, P M die Ordinate y, und diese sich von P M nach p m um das unendlichkleine Räumchen P p gleichlaufend entfernet, so ist die Abscisse A p um P p größer, also $= AP + Pp = x + dx$: aber die Ordinate ist $pm = PM - Rm = y - dy$ geworden, und es zeigt sich, daß also im ersten Falle das Differential beiahend, im 2ten verneinend sey.

§. 155.

§. 155.

Das Differential eines Produkts ist die Summe aus den Produkten eines jeden Faktors in das Differential des andern: oder

$$d(xy) = xdy + ydx$$

Bew. Es ist I. $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$;

denn $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$\quad - \qquad + \qquad -$

$\qquad 4xy$

Nun sey II. $x+y = v$ und II. $x-y = \mathrm{v}$

so ist $(x+y)^2 = v^2 \qquad (x-y)^2 = \mathrm{v}^2$

also III. $d(x+y) = dv$ III. $d(x-y = d\mathrm{v}$

IV. $d(x+y)^2 = 2vdv$ IV. $d(x-y^2 = 2\mathrm{v}d\mathrm{v}$

also nach I. u. IV. $4d(xy) = 2vdv - 2\mathrm{v}d\mathrm{v}$

aber nach II. u. III. $2vdv = 2(x+y).(dx+dy)$

$2\mathrm{v}d\mathrm{v} = 2(x-y).(dx-dy)$

also $4d(xy) = 2vdv - 2\mathrm{v}d\mathrm{v}$

$= 2(x+y).(dx+dy) - 2(x-y).(dx-dy)$.

$$= \begin{matrix} 2xdx + 2xdy + 2ydx + 2ydy \\ 2xdx - 2xdy - 2ydx + 2ydy \\ - \qquad + \qquad + \qquad - \end{matrix}$$

$4d(xy) = 4xdy + 4ydx$

$:4 \quad d(xy) = xdy + ydx$

I. Anmerk. In den wolfischen Elementen liest man dieß also bewiesen: $d(xy) = (x+dx)\times(y+dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$; $dxdy$ ist gegen die übrigen nicht zu achten, (§. 152. a.) wenn dann auch xy als die Größe selbst wegge-

lassen

lassen wird, so bleibt $x\ dy + y\ dx$ das Differential für xy: doch nur beynahe; weil $dx\ dy$ doch noch etwas ist. S. Kästners Anal. unendl. §. 25. Klemms mathem. Lehrb. §. 987.

II. Anmerk. De la Caille zeigt durch die II. Fig., daß das Differential des Parallelograms, welches ein Produkt von $AB \times BC$ ist, aus 3 unendlichkleinen Parallelogramen bestehe: nämlich aus $BbmP = y \times dx = y\,dx$: und $PmDM = x \times dy = x\,dy$, und aus $mPMC = dx \times dy$: also aus $x\,dy + y\,dx + dx\,dy$, wovon das letzte als ein Unendlichkleines der 2ten Ordnung verschwindet. S. de la Caille *Elem. Geom.* §. 920.

a) Das Differential von xyz, oder $d(xyz) = xy\,dz + xz\,dy + yz\,dx$.

b) $d(ax)$ ist nur $= a\,dx$; weil $da = 0$ (§. 153. a.) also auch $d(abyz = aby\,dz + abz\,dy$.

Beysp. zur Uebung. I. $d(uxy)$ II. $d(azx)$ III. $d(ab - bx)$ IV. $d(ax + bx^2)$ V. $d(xy^2 - ax)$ VI. $d(bxy - abx)$.

Anmerk. Ich setze hier noch einige aufgelöste Beyspiele her, welche bey weitem nicht so schwer sind, als sie es beym ersten Anblicke scheinen, wenn man diesen und den vorhergehenden Satz wohl zusammenhält; zugleich aber in Absicht auf die Anwendung und ihre wirkliche Ausübung ungemein vortheilhaft sind.

I. $d(x^2 y^2) = 2x\ y^2\,dx + 2y\ x^2\,dy$.

II. $d(x^3 y^3) = 3x^2 y^3\,dx + 3y^2 x^3\,dy$.

III. $d(x^n y^m) = nx^{n-1} y^m\,dx + my^{m-1} x^n\,dy$.

IV. $d\left(\frac{y^2}{x^m}\right) = d(y^2 x^{-m}) = 2yx^{-m}\,dy - mx^{-m-1}$
$y^2\,dx$.

 V.

V. $d(x+ax)^2 = 2(x+ax)^{2-1} \times (dx + adx) = 2xdx +$
$4axdx + 2a^2 xdx.$

VI. $d(xy+uy)^4 = 4(xy+uy)^3 \times (xdy + ydx + udy$
$+ ydu.)$

VII. $d\left(\frac{1}{xy+uy^4}\right) = d(xy+uy)^{-4} = 4(xy+uy)^{-5}$
$(xdy+ydx+udy+ydu) = 4\frac{(xdy+ydx+udy+ydu)}{xy+uy^5}$

§. 156.

Das Differential eines Quotienten ist das Produkt aus dem Nenner in das Differential des Zählers — dem Produkte aus dem Zähler in das Differential des Nenners mit dem Quadrate des Nenners dividirt, oder

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

Bew. Es sey $\frac{x}{y} = v$

so ist $x = vy$

Diff. $dx = vdy + ydv$

$-vdy$ $dx - vdy = ydv$

$:y$ $\frac{dx}{y} - \frac{vdy}{y} = dv$

für $v = \frac{x}{y}$ ges. $\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$

untereinerl. Benen. $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right).$

a)

a) Es ist also wieder I. $d\left(\frac{ax}{y}\right)=\frac{aydx-axdy}{y^2}$

$$\text{II. } d\left(\frac{a}{z}\right)=\frac{-adz}{z^2}$$

$$\text{III. } d\left(\frac{z}{a}\right)=\frac{dz}{a}$$

$$\text{IV. } d\left(\frac{b}{xy+uy}\right)=\frac{-xdy-ydx-udy-ydu}{x^2y^2+2uxy^2+u^2y^2}$$

$$\text{V. } d\left(\frac{bz}{xy-ux}\right)=$$

$$\frac{bxydz-buxdz-bzxdy-bzydx+bzudx+bzxdu}{x^2y^2-2ux^2y+u^2x^2}$$

§. 157.

$$d\sqrt{(a^2-x^2)}=\frac{-xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

Bew. Es sey $\sqrt{(a^2-x^2)}=y$

so ist (§. 55. a.) $a^2-x^2=y^2$

Diff. $-2xdx=2ydy$

: 2 $-xdx=ydy$

: y $-\frac{xdx}{y}=dy$

für y ges. $\sqrt{(a^2-x^2)}$. $\frac{-xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\sqrt{(a^2-x^2)}$

b) Auf die nämliche Art findet man

$$\text{I. } d\sqrt[3]{(ab+bx)}=\frac{bdx}{3\sqrt[3]{(ab+bx)^2}}.$$

$$\text{II. } d\sqrt{(ax-x^2)}=\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}.$$

$$\text{III. } d\sqrt{(xy+y^2)} = \frac{xdy+ydx+2ydy}{2\sqrt{(xy+y^2)}}$$

$$\text{IV. } da(\sqrt[3]{xy+uy})^2 = \frac{2axdy+2aydx+2audy+2aydu}{3\sqrt[3]{(xy+uy)}}$$

c) Es können auch diese Differentiale ohne Substitution nämlich, so wie die §. 155. Anmerk. gesucht werden. Das IVte Beyspiel würde dann also stehen:

$$da(\sqrt[3]{xy+uy})^2 = d(a\times\overline{xy+uy}^{\frac{2}{3}})$$

$$= \frac{2a}{3}(xy+uy)^{-\frac{1}{3}}\times(xdy+ydx+udy+ydu)$$

$$= \frac{2axdy+2aydx+2audy+2aydu}{3\sqrt[3]{(xy+uy)}}.$$

Anmerk. Institutio Calculi differentialis et integralis P. Mako, dessen Bücher ohnehin in vielen Händen sind, enthält pag. 23 und 25 mehr dergleichen Beyspiele, welche jenen, die sich in dieser Rechnung eine Fertigkeit erwerben wollen, ungemeine Dienste leisten werden, so wie überhaupt das ganze Werk aller Empfehlung würdig ist. Man muß es aber in der Geometrie schon weit gebracht haben, wenn man ihn vollkommen verstehen will.

§. 158.

Wenn eine Größe immerfort um gleiche Differentiale wächst oder abnimmt, so sieht man sie selbst als ne beständige Größe an: werden aber die Differentiale immer größer oder kleiner, so sind sie veränderlich, und haben auch selbst wieder Differentiale, die man Differentio Differentiale nennt. Man pflegt sie dann durch d (d x) oder d d x = $d^2 x$: (welches aber von dx^2 wohl zu unterscheiden ist), auszudrücken.

An=

Anmerk. In der I. und VI. Fig. läßt sich dieß wieder mit Augen sehen; denn gesetzt die Linie x wäre in einer Zeit um M m gewachsen; in der darauf folgenden aber um m n; und m n sey um o n größer, als M m = d x: oder m n = M m + o n; so wäre o n = d d x, oder das Differential vom Differential d x, um welches nämlich dieß gewachsen ist. Eben so kann in Fig. VI das Differential der Abscisse A P zwar immer gleich: d. i. P p = p q bleiben, und das Differential der Ordinate P M abnehmen, also selbst Differentiale haben. Man findet sie, wenn durch die Punkte M m des letzten Differentials eine gerade Linie t T fortgezogen wird: denn hernach zeichnet sich o n von selbst als das Differential = d d y aus, um welches nun d y kürzer geworden.

a) Es giebt daher nicht nur Differentiale der zweyten: sondern auch der dritten Ordnung $= d\,d^2 x = d^3 x$ u. s. w.

§. 159.

Differentialgrößen nochmal zu differentiren, sieht man sie als endliche Größen an, und differentirt sie, wenn sie selbst veränderlich sind, nach den §. 153. u. ff. gegebenen Regeln. So ist

I. $d\,(d\,x) = d\,d\,x$
$d\,(-d\,x) = -d\,d\,x$ (§. 153.)

II. $d\,(y\,d\,x) = y\,d\,d\,x + d\,x\,d\,y$
$d\,(y\,d\,y) = y\,d^2 x + (d\,y)^2$ (§. 155.)
$d\,(y\,d\,x + x\,d\,y) = y\,d^2 x + d\,x\,d\,y + x\,d^2 y + d\,y\,d\,x.$

III. $d\left(\frac{y}{d\,y}\right) = \frac{(d\,y)^2 - y\,d^2\,y}{(d\,y)^2}$ (§. 156.)

$d\left(\frac{y\,d\,y}{d\,x}\right) = \frac{d\,x\,(d\,y)^2 + y\,d\,x\,d^2 x y - y\,d\,y\,d^2 x}{(d\,x)^2}$

 IV.

IV. $d(dy^2) = 2dy\,d^2y$ (§. 154.)

$d(ny^{n-1}dy) = (n-1)n(y^{n-2})(dy)^2 + ny^{n-1}d^2y. = n^2 - ny^{n-2}(dy)^2 + ny^{n-1}d^2y.$

a) Wenn ein Differential nicht veränderlich, sondern beständig ist, so darf es auch nicht mehr differentirt werden. Z. B. in $d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)$ wird dx, wenn es beständig ist, nicht differentirt; sondern $d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)$ $= d(y\,dy)\,dx^{-1} = dx^{-1} \times y\,d^2y + (dy)^2$ $= \frac{y\,d^2y + (dy)^2}{dx}$

Es ist aber hier wohl zu merken, daß die Größe x selbst veränderlich sey; obschon das erste Differential d x beständig ist: denn sonst hätte sie auch kein erstes Differential. S. wieder Mako *Calc. diff. et integ. f.* 82.

Anmerk. Aus der Differentialrechnung läßt sich der große binomische Lehrsatz nach der Schärfe beweisen: Hr. Leonhard Euler *Inst. calc. diff. P. II.* §. 72. Klemm in seinen ersten Gründen aller mathem. Wissensch. §. 110. und mathem. Lehrb. haben dieß gethan. Von allen hat den Beweis davon Hr. Hofr. Kästner in einem 1775 zu Göttingen herausgegebenen Programma: *Theorema binomiale vniuersaliter demonstratum*, gemacht. S. Analys. Unendl. §. 48. Ich würde ihn hier eingerückt haben, wenn er nicht wieder für Anfänger zu schwer oder wohl gar unnütz heißen müßte. Um aber doch eine Anwendung von der Differentialrechnung zu machen, will ich die Methode vom Kleinsten und Größten wählen. Es sey daher

§. 160.

§. 160.

Wenn eine Größe unter allen möglichen von ihrer Art die größte, oder kleinste ist, so heißt sie im ersten Falle ein Größtes (Maximum) im zweyten ein Kleinstes (Minimum). Das größte Produkt, welches aus zween Theilen einer Zahl z. B. 8, möglich ist, nennt man ein Maximum: ein solches ist jenes, das aus den Theilen 4 + 4 entsteht, wenn sie ineinander multiplizirt werden: denn dieß ist größer als 1×8, und 2×4 rc.

2) Das Größte oder Kleinste wird gefunden, wenn man eine Größe differentirt, dann die Differentialgleichung $= 0$ setzt, und durch Kalkuliren, wie bey andern Gleichungen den Werth für x oder y sucht. Denn, weil das Größte und Kleinste kein Differential hat, so muß es herauskommen, wenn die Größe differentirt, und das Differential $= 0$ gesetzt wird.

Anmerk. Dieß zeigt sich in der VII. und VIII. Fig. Man sieht dort, daß unter allen Ordinaten P M und p m rc O C die Größte, und unveränderlich sey, da die Ordinaten nur bis O C wachsen, von da aus aber gleich wieder abnehmen. Daher sein Differential $= 0$ ist, wenn nun doch ihr Werth in den Defferentialen der übrigen Größen auf der andern Seite stehet; so muß sie sich finden lassen.

§. 161.

1te Aufg. Eine Größe soll in solche zween Theile getheilt werden, die das größte Produkt aus allen zween Theilen von a, oder ein Maximum geben.

Aufl. Die Größe sey a; ein Theil sey $= x$: so ist der andere $= a - x$: das Produkt aus diesen ist $(a-x) \times x = ax - x^2$. Also

ax

$$a x - x^2 = \text{Maxim.}$$

diff. $\quad a\,dx - 2x\,dx = 0$

$+ 2x\,dx \quad a\,dx = 2x\,dx$

$: dx \quad a = 2x$

$: 2 \quad \frac{a}{2} = x$

D. i. a muß in zween gleiche Theile getheilt werden. Spohr in seinen Anfangsgründen der Algebra §. 122. zeigt dieß mit der Zahl 11. Denn $\frac{11}{2} \times \frac{11}{2} = 30 + \frac{1}{4}$, welches Produkt größer ist, als jedes andere, das aus zween Theilen von 11 entstehen kann, die Theile mögen ganze, oder gebrochene Zahlen seyn.

Anmerk. Da sich aus den bisherigen, und der bloßen Betrachtung der Fig. VI. VII. und VIII. leicht schliessen läßt, daß die Ordinaten y einer krummen Linie nicht in dem nämlichen Verhältnisse mit den Abscissen wachsen und abnehmen müßen, wie in einer andern: so wird es auch schon begreiflich, daß man jede krumme Linie oder Figur durch Vergleichung der Ordinaten mit den Abscissen bestimmen könne, und daß man also, wenn einmal eine solche Bestimmung durch eine Gleichung ausgedrückt ist, auch daraus die größte Ordinate, oder Abscisse zu finden im Stande sey. Die Verfahrungsart hat so wenig Schwierigkeit, daß es aus der einmal gegebenen Gleichung der krummen Linie ein mittelmäßiger Kopf ohne Mühe lernen wird: es ist also für Anfänger gar nicht zu schwer: zugleich aber ein kleiner Vorgeschmack von der so schönen als erhabenen Lehre der krummen Linien.

§. 162.

2te Aufg. 1) Aus der gegebenen Gleichung des Zirkels die größte Ordinate; 2) aus der gegebenen Gleichung

chung der Elipse die größte Abscisse; 3) in der Parabel das Maximum zu finden.

Aufl. des 1. Wenn a der Durchmesser ist, so ist im Zirkel $y^2 = ax - x^2$, und nach (§.161.) $ax - x^2 =$ Max. Wenn man dann wie oben verfährt, wird endlich $x = \frac{a}{2}$ d. i. die größte Ordinate im Zirkel, oder das Maximum ist dort, wo die Abscisse dem halben Diameter gleich ist.

Aufl. des 2ten. In der Elipse ist

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$$

also $$bx - \frac{bx^2}{a} = \text{Max.}$$

diff. $$bdx - \frac{2bxdx}{a} = 0$$

$+\frac{2bxdx}{a}$ $$bdx = \frac{2bxdx}{a}$$

$\times a$ $$abdx = 2bxdx$$

$:bdx$ $$a = 2x$$

$:2$ $$\frac{a}{2} = x$$

so ist die größte Abscisse in der Elipse = der halben größern Axe.

Aufl. des 3ten. Hier ist

$$y^2 = ax$$

also $$ax = \text{Max.}$$

diff. $$adx = 0.$$

Da sich nun weiter nichts finden läßt, so hat die Parabel

rabel kein Maximum, und es gehen also die Schenkel Kc der Parabel ohne Ende immerfort weiter voneinander.

§. 163.

3te Aufg. Eine Größe a sey in solche 3 Theile zu theilen, die das größte Produkt aus jeden dreyen Theilen von a geben.

Aufl. Die Theile seyen x, y, z; so ist

I. $x+y+z=a$ II. $xyz=$ Max.

Diff. $dx+dy+dz=0$ $\quad xydz+xzdy+yzdx=0$

$dx+dy=-dz$ $\quad xzdy+yzdx=-xydz$

$$\frac{xzdy+yzdx}{xy}=-dz$$

also $$\frac{xzdy+yzdx}{xy}=dx+dy$$

$\times xy.$ $\quad xzdy+yzdx=xydx+xydy$

dy zusammenges. $\quad xzdy-xydy=xydx-ydzx$

$:xz-xy$ $$dy=\frac{xydx-yzdx}{xz-xy}.$$

III. nun sey $x=y$, so ist auch $dx=dy$. Wenn also überall x für y; für dy aber dx gesetzt wird, so entstehet

$$dx=\frac{x^2dx-xzdx}{xz-x^2}$$

$:dx$ $$1=\frac{x^2-xz}{xz-x^2}$$

$\times(xz-x^2)$ $\quad xz-x^2=x^2-xz$

+

$+x^2 + xz \qquad 2xz = 2x^2$

$:2x \qquad z = x$

weil nun nach III. auch $x = y$, so ist $x = y = z = \frac{a}{3}$: d. i. a muß in gleiche Theile getheilt werden. Spohr zeigt dieß wieder weitläufiger mit der Zahl 24 = 8 + 8 + 8, welche ineinander multiplizirt 512 geben, ein Produkt, welches größer ist, als jedes andere aus was immer für 3 andern Theilen von 24.

§. 164.

4te Aufg. Eine Größe a soll also in 2 Theile getheilt werden, daß die Summe ihrer Quadrate die kleinste aus allen sey.

Aufl. Ein unbekannter Theil davon sey = x, so ist der andere = a — x; die Summe ihrer Quadrate aber $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$ und also

$$2x^2 - 2ax + a^2 = \text{Min.}$$

Diff. $\qquad 4xdx - 2adx = 0$

$+2adx \qquad 4xdx = 2adx$

$:4dx \qquad x = \frac{2adx}{4dx} = \frac{a}{2}$

a muß also wieder in 2 gleiche Theile getheilt werden.

Anmerk. Auch von dieser Aufgabe werde ich zu seiner Zeit Gebrauch machen.

§. 165.

5te Aufg. In der Gleichung $x^2 - 10x + 60 = y$, das Kleinste y für x finden.

$$\text{Aufl.} \qquad x^2 - 10x + 60 = \text{Minim.}$$
$$\text{Diff.} \qquad 2x\,dx - 10\,dx = 0$$
$$+10\,dx \qquad 2x\,dx = 10\,dx$$
$$:2\,dx \qquad x = \frac{10\,dx}{2\,dx} = 5.$$

denn nur $x = 5$ in der Gleichung $x^2 - 10x + 60$ giebt $y = 35$; nimmt man aber $x = 4$, so ist $x^2 - 10x + 60 = 36$. Eben dieß entstehet, wenn $x = 6$: also ist 5 das Minimum in diesem Falle für y.

Anmerk. Dieß sind nun die Haupt- und Grundlehren der Differentialrechnung jener würdigen Erfindung des großen Leibnizens, der sich auf dem ganzen europäischen festen Lande, wie sich Hr. Hofr. Kästner ausdrückt, beynahe alle Mathematiker bedienen. Obschon die Differentiale von einigen Momenta, von andern Infinitesima, wieder von andern, wie von Hrn. Christ. Aug. Hausen Elementa genannt werden. Die Engelländer legen die Methode der Fluxionen zum Grunde, welche Neuton erfunden hat. Sie verstehen unter einer Fluxion die Geschwindigkeit, um welche eine fortfliessende Größe in einem jeden Augenblicke wächst, und zeigen sie mit einem oder mehrern Punkten an, die sie auf die wachsenden Größen schreiben. Z. B. $\dot{y}$ ist eine Fluxion von der ersten; $\ddot{y}$ von der 2ten Ordnung rc. Das daraus entstandene Ganze nennen sie Fluent. In Hrn. Prof. Klemms mathem. Lehrb. §. 978. kann man einen kurzen Begriff von der Fluxionenlehre finden. Hr. Hofr. Kästner handelt davon Analys. Unendl. §. 31. weitläufiger. Nik. Schenmark Prof. der Mathem. zu Lund, hat in seiner Anal. Geometrie, die erst vergangenes

Jahre zu Koppenhagen aus dem Schwedischen in das Deutsche übersetzt worden, die Fluxionen, wenn es doch eigentlich solche sind, auf die Geometrie angewendet. Nun etwas von der Geschichte.

Isaak Barrow A. 1630 zu London gebohren, ein eben so berühmter Theolog als Mathematiker, schon dadurch groß, weil er Neutons Lehrmeister gewesen, soll den ersten Grund zu der Analysis des Unendlichen in seinen Praelectionibus opticis gelegt, und das, was wir dx und dy nennen, e und a genannt haben. Ob nuu zwar die Engelländer den Neuton; die Deutschen den Leibnitz als den Erfinder der Fluxion- und Differentialrechnung angeben, so können doch wohl beyde aus Barows Schriften geschöpft, und jeder die seine, indem sie doch ganz verschieden sind, wirklich erfunden haben. Selbst die Schriften sowohl der alten besonders des Archmiedes, der die Parabel, so wie man's jetzt durch die Integralrechnung zu thun pflegt, quadriren könnte, als der neuern führen nach und nach an diese Rechnungen so nahe hin, daß Geister, wie sie waren, ohne große Schwierigkeit daraufkommen könnten. S. Hrn. Hofr. Kästners Anal. Unendl. §. 44.

Der Werth der großen leibnitzischen Erfindung wurde anfangs von den Mathematikern und selbst von dem Hugenius verkannt. Das berufene Problem de curua Isochrona öffnete endlich dem ältern Bernoulli, und auch dem Hugenius die Augen. Und nun fiengen nebst diesen sein Hr. Bruder Joh. Bernoulli und dessen eben so berühmte Hrn. Söhne Hrn. Nikol. Hrn. Daniel, und Hrn. Joh. Bernoulli, der Marquis d'Hospital u. a. große Männer an, die Differentialrechnung mit allem Eifer zu bearbeiten, und mit Erfindungen zu bereichern. In diesem Jahrhunderte wurde sie durch Hrn. Leonh. Euler zu Petersburg; Hrn. Dan. Bernoulli zu Basel; Hrn. Hausen zu Leipzig; Hrn. Hofr. Kästner zu Göttingen; Hrn. geheimen Rath von Segner; und Hrn. Hofr. Karsten zu Halle; Hrn. Krammer zu Genev; Hrn. Maklaurin in Engelland; Hrn. Clairaut u. d'Alambert in Frankreich fast bis auf den höchsten Gipfel gebracht. Das tiefsinnige, scharfe Genie der deutschen Mathematiker zeichnete sich hier besonders

aus.

aus. Es ist kaum eine Nation in ganz Deutschland, außer wo etwa das Monopolium in den Wissenschaften herrschte, welche nicht Männer aufweisen kann, die sich in diesem erhabenen Theile der Mathematik hervorzuthun beeifert haben. Vor allen hat Hr. Hofr. Kästner endlich die geometrische Schärfe, welche bisher den Gründen der Differentialrechnung noch immer fehlte, dadurch hergestellt, daß er sie auf die Gränze der Verhältnisse gebracht hat.

III. Abschnitt.

Gründe der Integralrechnung.

§. 166.

Die Größe, durch deren Differentirung das Differential entstanden ist, oder die Summe aller Differentialen heißt das Integral, und diese Summe oder Größe wieder finden, heißt Integriren. Das Zeichen des Integrals ist S. Das Integral von d x wird daher durch S d x ausgedrückt.

§. 167.

Alle Differentialgrößen werden nach dieser einzigen Regel integrirt. Man sehe jede Größe als eine Würde an; vermehre den Exponenten um 1; dividire dann mit diesem vermehrten Exponenten, und dem Differential die ganze Größe. Z. B. man sucht das Integral von d x; so ist bekannt, daß $dx = x^0 dx :$ $= 1 dx$. Man sieht daher 1 als die Würde x^0 an, vermehrt den Exponenten um 1: so wird die Größe

$x^1 dx$: dividirt man nun mit 1, und dem Differential dx; so ist:

$$\text{I. } S dx = S x^0 dx = \frac{x^1 dx}{1 dx} = x$$

$$S - dx = S - x^0 dx = -\frac{x dx}{dx} = -x$$

$$S(dx - dy) = \frac{x dx}{dx} - \frac{y dy}{dy} = x - y$$

$$\text{II. } S\, 2 x dx = \frac{2x^2 dx}{2 dx} = x^2$$

$$S\, 3x^2 dx = \frac{3x^3 dx}{3 dx} = x^3$$

$$S m x^{m-1} dx = \frac{m x^m dx}{m dx} = x^m.$$

$$\text{III. } S(x dy + y dx) = \frac{x y^1 dy + y x^1 dx}{dy + dx}$$

$$= \frac{xy \times \overline{dy + dx}}{dy + dx} = xy.$$

$$S(xy dz + xz dy + yz dx) = \frac{xyz dz + xzy dy + yzx dx}{dz + dy + dx}$$

$$= \frac{xyz(dx + dy + dz)}{dx + dy + dz} = xyz.$$

$$S(a dx) = \frac{a x dx}{dx} = ax.$$

$$S(b y dx - a x dy) = \frac{b y x dx}{dx} - \frac{a x y dy}{dy} = bxy - axy.$$

IV.

IV. $d\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) = \frac{yx\,dx - xy\,dy}{y^2(dx - dy)} =$

$$\frac{xy(dx - dy)}{y^2(dx - dy)} = \frac{xy}{y^2} = \frac{x}{y}$$

$$S\left(-\frac{a\,dx}{x^2}\right) = \frac{-ax\,dx}{x^2 - dx} = -\frac{a}{x}$$

$$S\left(\frac{2x\,dx}{a}\right) = \frac{2x^2\,dx}{2a\,dx} = \frac{x^2}{a}$$

V. $S(\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx) = \frac{\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}+1}dx}{\tfrac{1}{2}dx} = \frac{\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}dx}{\tfrac{1}{2}dx} = x^{\frac{1}{2}}$

$$= \sqrt{x}$$

$$S\left(\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\right) = \frac{\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}}dx}{\frac{m}{n}dx} = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

§. 168.

Zusammengesetzte Wurzel- oder Integralgrößen werden am bequemsten integrirt, wenn die Wurzelgröße so wie (§. 157.) einer andern y gleich gleichgesetzt, dann diese differentirt, und endlich ihr Werth in der gegebenen Größe wieder hergestellt wird. Die Methode heißt insgemein Differentialverwandlung (Transformatio differentialis). Ich will folgende 5 Beyspiele ordentlich ausführen, und dann etwelche zur Uebung nachsetzen.

I.

I. $S\,3x\,dx\sqrt{(b^2+x^2)} = \sqrt{(b^2+x^2)^3}$

Es sey $\sqrt{(b^2+x^2)} = y$

so ist (§. 55. a.) $b^2+x^2 = y^2$

Differ. $2x\,dx = 2y\,dy$

:2 $x\,dx = y\,dy$

$\times 3\sqrt{(b^2+x^2)} = y$ $3x\,dx\sqrt{(b^2+x^2)} = 3y^2\,dy$

Integr. also $S\,3x\,dx\sqrt{(b^2+x^2)} = \frac{3y^3\,dy}{3\,dy} = y^3$

für y subst. $\sqrt{(b^2+x^2)}$. $= \sqrt{(b^2+x^2)^3}$

II. $S(dx+dy)\sqrt{(x+y)} = \frac{2}{3}\sqrt{(x+y)^3}$.

Es sey $\sqrt{(x+y)} = v$

so ist $x+y = v^2$

Differ. $dx+dy = 2v\,dv$

$\times\sqrt{(x+y)} = v$ $(dx+dy)\sqrt{(x+y)} = 2v^2\,dv$

Integr. $S\,dx+dy\sqrt{(x+y)} = \frac{2v^3\,dv}{3\,dv} = \frac{2}{3}v^3$

für v subst. $\sqrt{(x+y)}$ $= \frac{2}{3}\sqrt{(x+y)^3}$

III. $S\,x\,dx\sqrt[4]{(a-x)} = \frac{4}{9}\sqrt[4]{(a-x)^9} - \frac{4}{5}\sqrt[4]{(a-x)^5}$.

Es sey $\sqrt[4]{(a-x)} = v$

also $a-x = v^4$ und $x = a - v^4$

Differ. $-dx = 4v^3\,dv$

$\times x = a - v^4$. $-x\,dx = 4av^3\,dv - 4v^7\,dv$

mit veränd. Zeich. $x\,dx = 4v^7\,dv - 4av^3\,dv$

$\times\sqrt[4]{(a-x)} = v$. $x\,dx\sqrt[4]{(a-x)} = 4v^8\,dv - 4av^4\,dv$

Integr. $S\,x\,dx\sqrt[4]{(a-x)} = \frac{4v^9\,dv}{9\,dv} - \frac{4av^5\,dv}{5\,dv}$

$= \frac{4}{9}v^9 - \frac{4}{5}av^5$

für v ges. $\sqrt[4]{(a-x)}$. $= \frac{4}{9}\sqrt[4]{(a-x)^9} - \frac{4}{5}\sqrt[4]{(a-x)^5}$

$$\text{IV. } S\frac{2adx-4xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}}=4\sqrt{(ax-x^2)}.$$

Denn $S\frac{2adx-4xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}}=(2adx-4xdx)(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

also sey wieder $(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}=v^{-\frac{1}{2}}$

so ist die $\sqrt{}$ ausgez. $ax-x^2 = v$

Diff. $adx-2xdx=dv$

$\times 2$ u. $(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}=v^{-\frac{1}{2}}$ $(2adx-4xdx)=$

$(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}=2v^{-\frac{1}{2}}dv$

Integr. $S(2adx-4xdx(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2v^{\frac{1}{2}}dv}{\frac{1}{2}dv}$

$=4v^{\frac{1}{2}}$

für v subst. $ax-x^2$ $=4(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}. = 4\sqrt{(ax-x^2)}.$

$$\text{V: } Sdx\sqrt{(bx^2+x^4)}=\tfrac{1}{3}\sqrt{(b+x^2)^3}.$$

Denn wenn ein Faktor x^2 hinterhalb dem Wurzelzeichen nach (§. 52. e.) vor das Wurzelzeichen gebracht wird, so entsteht $x\,dx\sqrt{(b+x^2)}$ daraus. Wenn nun wieder

$\sqrt{(b+x^2)}=v$

so ist $b+x^2=v^2$

Diff. $2xdx=2vdv$

$:2$ $xdx= vdv$

$\times\sqrt{(b+x^2)}=v.$ $xdx\sqrt{(b+x^2)}=v^2dv$

Integr.

Integr. $Sxdx\sqrt{(b+x^2)} = \frac{v^3 dv}{3dv} = \frac{v^3}{3}$.
für v ges. $\sqrt{(b+x^2)}$ $= \frac{1}{3}\sqrt{(b+x^2)^3}$.

Beyspiele zur Uebung.

I. $Sadx\sqrt{(ax-a^2)} = \frac{2}{3}\sqrt{(ax-a^2)^3}$.

II. $S\frac{adx}{\sqrt{(ax-a^2)}} = Sadx\sqrt{(ax-a^2)^{-1}} =$
$2\sqrt{(ax-a^2)}$.

III. $S\frac{xdx}{\sqrt[4]{(a-x)}} = \frac{4}{7}(a-x)^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3}(a-x)^{\frac{3}{4}}$.

IV. $Sxdx\sqrt{(a+x)^3} = \frac{2}{7}\sqrt{(a+x)^{\frac{7}{2}}} - \frac{2}{5}\sqrt{a}$
$(a+x)^{\frac{5}{2}}$.

V. $S\left(\frac{xdx}{\sqrt{(a+x)^3}}\right) = 2\sqrt{(a+x)} - \frac{2a}{\sqrt{(a+x)}}$.

Anmerk. Diese und andere ähnliche Beyspiele werden nun Anfänger ohne große Mühe nachmachen. Nur ist bey dem IVten zu merken, daß sie $\sqrt{(a+x)^3} = v$; $(a+x)^3 = v^2$; und $a+x = v^{\frac{2}{3}}$: dann wird $x = v^{\frac{2}{3}} - a$, woraus sich leicht wieder differentiren läßt. Das nämliche gilt auch für das 5te Beyspiel.

§. 169.

Wenn Differentialgrößen vorhanden sind, die sich auch durch die Verwandlung nicht integriren lassen, dergleichen Wurzelgrößen und Brüche sind; so muß ihr Integral durch Näherung gesucht werden, indem man jene nach §. 92., diese nach §. 44. in unendliche abnehmende Reihen auflöset: dann alle Glieder der Rei-

he mit dem Differential dx, oder dy, je nachdem die veränderliche Größe x oder y ist, multiplizirt, dann wieder ein jedes Glied nach der Hauptregel des §. 167. integrirt, und endlich davon so viel Glieder nimmt, als zur genauen Näherung nothwendig ist. Ich will für jede Gattung zwey Beyspiele aussetzen.

Beyspiele von Wurzelgrößen.

I. $S\,dx\sqrt{(ax - x^2)} = S\,dx(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$ und (§. 92.)

$$S\,dx\left(a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16a^{\frac{5}{2}}} - - - - -\right) =$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}}dx - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8a^{\frac{3}{2}}}dx - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16a^{\frac{5}{2}}}dx\right.$$
$$- - - -$$

Integr. $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{10}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{56}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{144}\frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}} - - -$

abgek. $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{28}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{72}\frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}} - - - -$

II. $S\,dy\sqrt{\left(\frac{a^2 + 4y^2}{a}\right)} = S\frac{dy}{a}(a^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}} =$

$$S\frac{dy}{a}\left(a + \frac{2y^2}{a} - \frac{2y^4}{a^3} + \frac{4y^6}{a^5} - \frac{10y^8}{a^7} - - -\right)$$

$$=S\frac{a\,dy}{a}+\frac{2y^2dy}{a^2}-\frac{2y^4dy}{a^4}+\frac{4y^6dy}{a^6}-\frac{10y^8dy}{a^8}----$$

$$\text{Integr.}=y+\frac{2y^3}{3a^2}-\frac{2y^5}{5a^4}+\frac{4y^7}{7a^6}-\frac{10y^9}{9a^8}----$$

Beyspiele von Brüchen.

$$\text{I. } S\frac{a^2dx}{b+x}=S\,dx\left(\frac{a^2}{b+x}\right) \text{ oder (§ 44.)} =$$

$$S\,dx\left(\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}----\right.$$

$$\text{Integr.}=\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{b^2}+\frac{a^2x^3}{b^3}----$$

$$\text{II. } S\frac{a^3dy}{2a^2+y^2}=S\tfrac{1}{2}dy\times\left(\frac{a^3}{a^2+y^2}\right)=$$

$$S\tfrac{1}{2}dy\times\left(a-\frac{y^2}{a}+\frac{y^4}{a^3}-\frac{y^6}{a^5}\right)----$$

$$=S\tfrac{1}{2}a\,dy-\tfrac{1}{2}\frac{y^2dy}{a}+\tfrac{1}{2}\frac{y^4dy}{a^3}-\tfrac{1}{2}\frac{y^6dy}{a^5}-$$

$$\text{Integr.}=\tfrac{1}{2}ay-\tfrac{1}{6}\frac{y^3}{a}+\tfrac{1}{10}\frac{y^5}{a^3}-\tfrac{1}{14}\frac{y^7}{a^5}----$$

a) Enthält eine Wurzelgröße etwa mehr Glieder, als zwey z. B. $\sqrt{(b+2x-x^2)}$: so macht man sie zu einer zweygliedrigen, indem man $2x-x^2=c$ setzt; erhebt $(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$ nach (§. 92.) alsdann auch $b+c$ eben so, und substituirt für c ihren Werth.

b) Weil die Reihen der Näherung halber abnehmend seyn müßen, so folget von sich selbst, daß das erste Glied der zusammengesetzten Wurzelgröße, oder des Nenners vom Bruche größer, als das zweyte, oder das in $\sqrt{(a x - x^2)}$, $a x > - x^2$, in $\frac{1}{b + x}$, $b > x$ seyn müße: daher dann allemal die größere Quantität voraus gesetzt werden müßte: $- x^2$ im ersten Falle, und $+ x$ im zweyten, wenn $- x^2 > a x$, und $x > b$ wäre, oder wie man sagt: Series diuergens in conuergentem mutanda ꝛc.

Anmerk. Für Beyspiele zur Uebung können alle §. §. 44. und 92. angeführte dienen. Ehe ich nun die Art die beständige Größe, welche bey vielen Differentiirungen wegfällt, zu finden angebe, will ich den Gebrauch der Integralrechnung in einigen leichtern Aufgaben zeigen. Weil man aber nothwendig das Differential oder Element einer Fläche wissen muß, will ich es kurz zuvor zeigen, und des Freyherrn von Wolfs Methode dazu wählen, weil sie die leichteste ist, und man mehr nicht aus der Geometrie zu wissen nothwendig hat, als den Innhalt eines Parallellograms zu finden. (§. 153. Anmerk.) Kästners seine, welche freylich schärfer ist, kann in Hrn. Klemms schon so oft genanntem mathematischen Lehrbuche, oder selbst in Hrn. Kästners Analysis unendlicher Größen gefunden werden.

§. 170.

1) Wenn sich in der III., VI., VII. und VIII. Fig. eine Ordinate P M immer parallell abwärts, oder aufwärts bewegt, und so um kleine Differentiale zu- oder abnimmt, so beschreibt sie lauter Trapeze p M p m, aus deren Summe die ganze Figur entstehet. Ein sol-

ches

ches Trapez heißt das Differential, oder Element der Fläche einer Figur.

2) Das Element der Fläche einer jeden Figur ist $= y\,dx$.

Bew. Das Element ist das Trapez $PpMm =$ $PpMR + MRm$:

$$\text{aber } PpMR + MRm = Pp \times pR + \frac{MR \times Rm}{2}$$

$$= dx \times y + \frac{dx \times dy}{2} = y\,dx + \frac{dx\,dy}{2}$$

$\frac{dx \times dy}{2}$ verschwindet (§. 152. b.)

also bleibt das Element $PpMm = dx \times y = y\,dx$.

a) Die Summe aller Trapeze, oder das Integral ist also $S\,y\,dx$.

b) Wenn daher y in der Gleichung für eine Figur einmal gegeben ist, dürfen nur I. beyde Glieder der Gleichung mit dx multiplizirt werden; so hat man $y\,dx$ das Differential der Figur auf einer, und seinen Werth auf der andern Seite. II. Wird nun bey $y\,dx$ nur das Integralzeichen S vorgesetzt, auf der andern Seite aber wirklich integrirt: so ist die Quadratur oder die Fläche der Figur gefunden. Folgende Aufgaben werden die Sache vollkommen in's Licht setzen.

§. 171.

1te Aufg. Den Innhalt eines Dreyeckes A B C (Fig. II.) finden.

Aufl.

Aufl. Es sey die Höhe des Dreyeckes = a; die Grundlinie = b; eine Abscisse A P = x; die dieser entsprechende Ordinate P M = y. So ist (§. 168.) $y\,\mathrm{d}x$ das Element des Dreyeckes. Es ist also nur y zu suchen. Nun verhält sich aber, wie wir unterdessen annehmen, und selbst aus der Figur leicht schliessen können.

$$AB : BC = AP : PM$$

oder $$a : b = x : y$$

also ist $$y = \frac{b\,x}{a}$$

$\times\, \mathrm{d}x$ $$y\,\mathrm{d}x = \frac{b\,x\,\mathrm{d}x}{a}$$

Dieß ist nun ein Trapez P p M m: oder beyderseits das Element des Dreyeckes: die Summe aller Elemente, oder das Integral aber ist

$$S\,y\,\mathrm{d}x = \frac{b\,x^2\,\mathrm{d}x}{2\,a\,\mathrm{d}x} = \frac{b\,x^2}{2\,a}.$$

Setzt man nun statt der Abscisse x die ganze Höhe a, so ist der Innhalt des Dreyeckes

$$S\,y\,\mathrm{d}x = \frac{b\,a^2}{2\,a} = \frac{b\,a}{2}$$

D. i. das halbe Produkt aus der Höhe in die Grundlinie, wie die ebene Geometrie lehret, und (§. 53. Anmerk.) gesagt worden.

§. 172.

2te Aufg. Den Innhalt oder die ganze Fläche der Parabel A B C finden. Fig. VI.

Aufl.

Aufl. In der Parabel ist, wie wir in der höhern Geometrie beweisen werden

$$y^2 = a\,x$$

so ist $\quad y = \sqrt{a\,x} = a^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}$

$\times\,d\,x \quad y\,d\,x = a^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}\,d\,x$ das Element.

Integr. $\quad S\,y\,d\,x = \frac{a^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{3}{2}}\,d\,x}{\frac{3}{2}\,d\,x} = \frac{2\,a^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{a x^3}$

weil nun $\quad y^2 = a\,x$

so ist : $x \quad \frac{y^2}{x} = a$

für a subst. $\frac{y^2}{x}$. $\quad S\,y\,d\,x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{y^2\,x^3}{x}} =$

$$\frac{2}{3}\sqrt{y^2\,x^2} = \frac{2}{3}\,x\,y.$$

a) Eben so kann man eine jede Linie quadriren, es mag die Gleichung davon aussehen, wie sie wolle. Zur Uebung will ich aus Wolfens Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften die Gleichungen einiger krummen Linien anführen. Es sey

I. $x\,y^3 = a^4$; so ist

$$x\,y^3 = a^4$$

$:x \quad y^3 = \frac{a^4}{x} = a^4\,x^{-1}$

$\sqrt[3]{\ }$ ausgez. $\quad y = a^{\frac{4}{3}}\,x^{-\frac{1}{3}}$

$\times\,d\,x. \quad y\,d\,x = a^{\frac{4}{3}}\,x^{-\frac{1}{3}}\,d\,x$

Integr. $\quad S\,y\,d\,x = \frac{3}{2}\,a^{\frac{4}{3}}\,x^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[3]{\ }$ ausg. $\quad = \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^4\,x^2}.$

II. $b^2 y = b x^2 - x^3.$

$$b^2 y = b x^2 - x^3$$

$$: b^2 \qquad y = \frac{b x^2 - x^3}{b^2}$$

$$\times dx \qquad y\,dx = \frac{b x^2\,dx - x^3\,dx}{b^2}$$

$$\text{Integr.} \qquad S\,y\,dx = \frac{b x^3}{3 b^2} - \frac{x^4}{4 b^2} = \frac{x^3}{3 b} - \frac{x^4}{4 b^2}.$$

III. $a^4 y = x^5 + a x^4 + a^2 x^3 + a^3 x^2 + a^5.$

$$y = \frac{x^5}{a^4} + \frac{x^4}{a^3} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2}{a} + a$$

$$\times dx.\ y\,dx = \frac{x^5\,dx}{a^4} + \frac{x^4\,dx}{a^3} + \frac{x^3\,dx}{a^2} + \frac{x^2\,dx}{a} + a\,dx$$

$$\text{Integ.}\ S\,y\,dx = \frac{x^6}{6 a^4} + \frac{x^5}{5 a^3} + \frac{x^4}{4 a^2} + \frac{x^3}{3 a} + a x.$$

b) Wenn die Gleichung der krummen Linie $y^2 = (x^4 + a^2 x^2)$ wäre, so würde sie also integrirt:

$$y^2 = x^4 + a^2 x^2$$

$$\sqrt{\ }\text{ausgez.}\ y = \sqrt{x^4 + a^2 x^2}$$

$$= x \sqrt{(x^2 + a^2)} \quad (\S.\ 52.\ e.)$$

Wird nun $\sqrt{(x^2 + a^2)} = v$ gesetzt: so wird das Integral der Gleichung ohne Schwierigkeit gefunden. Man wird diesen Fall auch auf andere ähnliche Gleichungen anwenden können.

§. 173.

§. 173.

3te Aufg. Den Zirkel quadriren. (Fig. VIII.)

Aufl. Im Zirkel ist $y^2 = ax - x^2$. Und

$\sqrt{}$ ausgez. $\quad y = \sqrt{(ax - x^2)}$

folglich $\quad y = (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$\times dx$ $\quad y\,dx = dx \times (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$ das Differential der Zirkelfläche

folglich Integr. $S\,y\,dx = S\,dx \times (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$(\S.169.I.) = S\,a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} dx - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8a^{\frac{3}{2}}} dx - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16a^{\frac{5}{2}}} dx \;---$$

$$= \tfrac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{5} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{1}{28} \frac{x^{\frac{7}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} - \tfrac{1}{72} \frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}} \;---$$

welches, wenn man $x = \frac{1}{2}a$ setzt, der 4te Theil, oder ein Quadrant des Zirkels ist: also mit 4 multiplizirt, den ganzen Innhalt des Zirkels giebt.

a) Es ist auch im Zirkel $y^2 = a^2 - x^2$.

also $\quad y = \sqrt{(a^2 - x^2)} = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$\times dx.$ $\quad y\,dx = dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ (§.92.2te Aufg.)

$$= a\,dx - \frac{x^2\,dx}{2a} - \frac{x^4\,dx}{8a^3} - \frac{x^6\,dx}{16a^5} - \frac{5x^8\,dx}{128a^7} \;----$$

S

$$S y d x = a x - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40 a^3} - \frac{x^7}{112 a^5} - \frac{5 x^8}{1152 a^7} - - -$$

Setzt man hier $a = \frac{1}{2}$, oder dem halben Diameter, und dann auch diesem die Abscisse x gleich, so ist $a^2 = \frac{1}{4}$, und der Quadratinnhalt des Quadranten A O C wird

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6 \times 4} - \frac{1}{40 \times 4} - \frac{1}{112 \times 4} - - -$$

dieser mit 4 multiplizirt, giebt die ganze Zirkelfläche =

$$1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152} - - -$$

§. 174.

4te Aufg. Die Elipse quadriren. (Fig. VII.)

Aufl. Wir werden beweisen, daß auch in der Elipse $y^2 = \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}$.

$\surd$ ausg. $y = \surd \left(\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2} \right)$

$= \frac{b}{a} \surd (a^2 - x^2)$ (§. 52. e.)

$\times dx$ $y d x = \frac{b d x}{a} \surd (a^2 - x^2)$

Wird nun die Reihe aus $\surd (a^2 - x^2)$ (vorherg. §. a.) gemacht, und alle Glieder mit $\frac{b d x}{a}$ multiplizirt: so ist

$$y d x = \frac{a b d x}{a} - \frac{b x^2 d x}{2 a^2} - \frac{b x^4 d x}{8 a^4} - \frac{b x^6 d x}{16 a^6} -$$

Integr.

Integr. $Sy\,dx = bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - -$

Wenn nun b die halbe kleinere Axe $\frac{BC}{2}$; a die halbe größere $\frac{AE}{2}$ bedeutet; und auch $x = a$ angenommen wird: so ist

$$ab - \tfrac{1}{6}ab - \tfrac{1}{40}ab - \tfrac{1}{112}ab - - -$$

a) Wird endlich $a = b$ gesetzt, so erhält man wieder die obige Quadratur des Zirkels: Es folgt also daraus, daß sich der Innhalt, oder die Quadratur der Elipse auf jene des Zirkels beziehe, wie wir zu seiner Zeit mit mehrern hören werden.

Anmerk. Nun wollen wir endlich auch sehen, wie die beständige Größe, welche bey der Differentialrechnung einiger Größen wegfällt, wieder herzustellen sey.

§. 175.

Die beständige Größe zu finden, welche bey der Differentialrechnung weggefallen ist, setzt man in dem gefundenen Integral die veränderliche Größe x, oder $y = 0$: heben sich nun alle Glieder des Integrals auf, so daß nichts übrig bleibe, so fehlt auch keine beständige Größe: bleibt aber noch eine Größe übrig, so muß sie mit veränderten Zeichen: + in —, und — in + zu den Integral gesetzt werden.

Z. B. weil in dem Integral der Parabel $= \frac{2}{3}xy$ das Ganze 0 wird, wenn nur $x^3 = 0$ gesetzt wird, so fehlt hier keine beständige Größe, und das Integral ist also vollkommen.

Aber

Aber man suche I. nur das Stück P M B C (Fig. VI.) und A P sey $= b$; P B $= x$: so ist A B $= b + x$ und $y^2 = a \times (b + x) = a b + a x$, weil in der Parabel $y^2 = AB \times a$ und $AB = b + x$.

Folgl. ist $y = \sqrt{(a b + a x)}$

$\times dx$ $y dx = dx \sqrt{(ab + ax)}$.

Nun ist $\sqrt{(ab + ax)} = v$

so ist $ab + ax = v^2$

Diff. $a dx = 2 v dv$

$: a$ $dx = \frac{2 v dv}{a}$

$\times \sqrt{(ab+ax)}$ $dx \times \sqrt{(ab + ax)} = \frac{2 v^2 dv}{a}$

Integr. $S dx \sqrt{(ab + ax)} = \frac{2}{3} \frac{v^3}{a}$

für v, $\sqrt{(ab + ax}$ gesetzt.) $= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(ab+ax)^3}{a}}$

$= \frac{2}{3} \frac{(ab + ax)}{a} \sqrt{(ab + ax)} = \frac{2}{3} (b + x) \sqrt{(ab+ax)}$

Wird nun hier $x = 0$ gesetzt, so giebt es

$\frac{2}{3} (b + 0) \sqrt{(ab + 0)}$

wo offenbar $\frac{2}{3} b \sqrt{ab} = APM$ übrig bleibt, also abgezogen werden muß, welches durch Zusetzung mit veränderten Zeichen + in — geschiehet; dadurch entstehet der wahre Innhalt.

II. Würde] A B als beständig angenommen: also $= b$, und nur P B $= x$, und nun wieder P M B C ge=

gesucht; so wäre jetzt $y^2 = ab - ax$ (weil hier AB $= b - x$; in der Parabel aber $y^2 = AB \times a$ ist) folglich $y = \sqrt{(ab - ax)}$ also wieder

$\times dx \quad y\,dx = dx\sqrt{(ab - ax)}$

Wenn also $\sqrt{(ab - ax)} = v$

so ist $ab - ax = v^2$

Diff. u. : a $\quad -dx = \dfrac{2v\,dv}{a}$

+ gesetzt $\quad dx = -\dfrac{2v\,dv}{a}$

$\times \sqrt{ab + ax} = v.\ dx\sqrt{ab - ax} = -\dfrac{2v^2\,dv}{a}$

Integr. $S\,dx\sqrt{ab - ax} = -\frac{2}{3}\dfrac{v^3}{a}$

für v ges. $\sqrt{(ab - ax)} = -\frac{2}{3}\sqrt{(ab - ax)^3}$

$= -\frac{2}{3}\dfrac{ab - ax}{a}\sqrt{(ab - ax)} = -\frac{2}{3}\,b - x\sqrt{ab - ax}$

Wird nun hier $x = 0$, so ist das Integral $-\frac{2}{3}(b - 0)\sqrt{ab - 0} = -\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$: D. i. es fehlt der ganze Theil $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ = dem Ganzen A B C, der dann dem obigen $-\frac{2}{3}\,b - x\sqrt{ab} - ax$ nur = A P M addirt werden muß, wozu nothwendig vorher das Zeichen − in + zu verändern ist.

Anmerk. Um die Lehre der Integralrechnung vollständiger zu machen, will ich endlich noch einige schwerere Integralformeln für einige zusammengesetzte Differentiale anhängen. Die, welche das Bisherige wohl verstanden haben, werden sie ohne besondere Mühe nachmachen: besonders da überall die ganze Verfahrungsart angezeigt wird: überhaupt aber hier nichts so sehr zu empfehlen ist, als öftere und fleißigere Uebung.

§. 176.

§. 176.

Es sey $x^{rn} \cdot x^{n-1} \cdot (a + b x^n)^p dx$ zu integriren. Ich setze

$$\text{I. } a + b x^n = z$$

so ist diff. $\quad n b x^{n-1} dx = dz$

und $\quad \text{II. } (a + b x^n)^p = z^p$

$$\text{III. } x^n = \frac{z-a}{b}$$

also $\quad \text{IV. } x^{rn} = \frac{(z-a)^r}{b^r}$

Werden nun diese in I., II., III., IV. gefundenen Werthe für die gegebene Formel gesetzt: so verwandelt sie sich in folgende:

$$\frac{(z-a)^r}{b^r} \cdot \frac{z^p dz}{nb} = \frac{(z-a)^r \cdot z^p dz}{n b^{r+1}} = (z-a)^r \cdot \frac{z^p dz}{nb^{r+1}}.$$

nach (§. 90.) $(z-a)^r = z^r - r z^{r-1} a + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} z^{r-2} a^2 - - - \pm a^r) \cdot \frac{z^p dz}{nb^{r+1}}$

wenn alles mit $z^p dz$ multiplizirt wird. $= z^{r+p} dz - r z^{r+p-1} a dz + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} z^{r+p-2} a^2 dz - - - \pm \frac{a^r z^p dz}{n b^{r+1}}$

Wird nun alles gehörig integrirt; so entsteht

$$\frac{z^{r+p+1}}{r+p+1} - \frac{r z^{r+p} a}{r+p} + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \frac{z^{r+p-1} a^2}{r+p^{-1}} - - - - \pm \frac{a^r z^{p+1}}{p+1}$$

Stel-

Stellet man jetzt statt z wieder $a + b x^n$ zurück, und theilet dann die ganze Reihe mit der unveränderlichen Größe $n b^{r+1}$; so wird die gegebene Forme wirklich, und zwar durch eine endliche Reihe, die $r + 1$ Glieder hat, integrirt: voraus gesetzt, daß r eine endliche ganze beiahte Zahl sey.

a) Soll nun $x^3 . x^{\frac{1}{2}} d x (a + b x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ integrirt werden: so wäre $r = 3$; $p = \frac{1}{3}$; $n = -\frac{1}{2}$: und das Integral

$$\left(\frac{3 z^{13:3}}{13} - \frac{9 a z^{10:3}}{10} + \frac{9 a^2 z^{7:3}}{7} - \frac{3 a^3 z^{4:3}}{3}\right)$$

$$: -\tfrac{1}{2} b^4.$$

b) Also läßt sich $x^m d x (a + b x^n)^p$ allzeit integriren, wenn sie sich in $x^{m+1-n} . x^{n-1} d x . (a + b x^n)^p$ verwandeln läßt, $x^{m+1-n} = x^{rn}$ ist.

§. 177.

Es sey $\frac{a^2 d x}{x \sqrt{(a x + x^2)}}$ zu integriren; so

setzt man I. $\sqrt{a x + x^2} = \frac{z x}{b}$

dann wird $z = \frac{b \sqrt{(a x + x^2)}}{x}$

und nach I. $a x + x^2 = \frac{z^2 x^2}{b^2}$

$: x$ $\quad a + x = \frac{z^2 x}{b^2}$

$\times b^2$ $\quad a b^2 + b^2 x = z^2 x$

$- b^2 x$ $\quad a b^2 = z^2 x - b^2 x = x (z^2 - b^2)$

$: z^2$

$: z^2 - b^2 \qquad$ II. $x = \frac{a b^2}{z^2 - b^2}$

$\times \frac{z}{b} \qquad | \; \frac{z x}{b} = \frac{a b^2 z}{(z^2 - b^2) b} = \frac{a b z}{z^2 - b^2}$

$= \sqrt{a x + x^2}$ nach I.

nun ist $\qquad x = \frac{a b^2}{z^2 - b^2}$ nach II.

Diff. $\qquad d x = \frac{a b^2 . - 2 z d z}{(z^2 - b^2)^2}$ (§. 156.)

$\times a^2 \qquad$ III. $a^2 d x = \frac{a^2 . - 2 a b^2 z d z}{(z^2 - b^2)^2}$

IV. $x \sqrt{(a x + x^2} = \frac{a b^2}{z^2 - b^2} . \frac{a b z}{z^2 - b^2}$ (I. u. II.)

also nach III. und IV. $\qquad \frac{a^2 d x}{x \sqrt{(a x + x^2)}} = \frac{a^2 . - 2 a b^2 z d z}{(z^2 - b^2)^2}$

$. \frac{z^2 - b^2}{a b^2} . \frac{z^2 - b^2}{a b z}$

Wenn man nun wirklich multiplizirt, und gegeneinander aufhebt, so wird endlich

$$S(-\frac{2 a d z}{b} = \frac{2 a z}{b} = - \frac{2 a \sqrt{(a x + x^2)}}{x}$$

wenn der Werth von z wieder hergestellet wird.

§. 178.

Man soll $\frac{d x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$ integriren:

so sey $\qquad$ I. $\sqrt{(x^2 - a^2)} = z - x$

dann wird $\qquad x^2 - a^2 = z^2 - 2 z x + x^2$

$- x^2 \qquad - a^2 = z^2 - 2 z x$

+

$+2zx \qquad 2zx - a^2 = z^2$

$+a^2 \qquad 2zx = z^2 + a^2$

$:2z \qquad \text{II.} \quad x = \frac{z^2 + a^2}{2z}$

folglich $\qquad z - x = z - \frac{(z^2+a^2)}{2z}$

unter einer Ben. $\qquad = \frac{2z^2 - (z^2 + a^2)}{2z}$

wirkl. subt. $\qquad \text{III.}\ z - x = \frac{z^2 - a^2}{2z}$

auch ist $\qquad z - x = \sqrt{x^2 - a^2)}$ nach I.

also $\qquad \frac{z^2 - a^2}{2z} = \sqrt{(x^2 - a^2)}$

weil aber $\qquad x = \frac{z^2 + a^2}{2z}$ nach II.

so ist (§. 156.) $\quad dx = \frac{4z^2\,dz - (2z^2\,dz + 2a^2\,dz)}{4z^2}$

wirkl. subt. $\qquad = \frac{2z^2\,dz - 2a^2\,dz}{4z^2}$

abgek. $\qquad \text{IV.}\ dx = \frac{(z^2 - a^2).\,dx}{2z^2}$

endlich nach IV. und III. $\qquad \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \frac{(z^2 - a^2)\,dz}{2z^2} \cdot \frac{2z}{z^2 - a^2}$

abgek. $\qquad = \frac{2z\,dz}{2z^2} = \frac{dz}{z}$

welches, wie wir zu seiner Zeit sehen werden, ein lo-garithmisches Differential ist, und daher für ihr In-

tegral $L z = L(x + \sqrt{(x^2 - a^2)})$ hat: denn weil nach I. $\sqrt{x^2 - a^2} = z - x$; so ist $z = x + \sqrt{(x^2 - a^2}$: folglich $L z = L(x + \sqrt{(x^2 - a^2)})$. Von derley Beyspielen sieh Hrn. Hofrath Kästners Analys. Unendl. §. 145 ꝛc. und Eulers *Introduct. in Anal. Infinit. L. I. c.* 3. Io. Gust. Karsten *Mathesis theor. elementaris, atque sublimior Sect. XX.* §. 311. *et* 312.

§. 179.

Auf die bisher angeführten Arten lassen sich die meisten Differentialformeln integriren. Es gehöret eigentlich mehr nicht dazu, als daß man einmal wisse, unter was für eine Art eine gegebene Formel gehöre. Wenn daher z. B. $p x^{m-1} d x (x^m + a^m)^{\frac{n}{r}}$ werden soll; dürfte nur nach dem I. Beyspiele §. 168. $(x^m + a^m)^{\frac{n}{r}} = y$ gesetzt werden; so würden endl. $\frac{pr}{mr + mn}(x^m + a^m).(x^m + a^m)^{\frac{n}{r}}$ als das wahre Integral heraus kommen.

Wollte man von $(a^2 d x + 2 x^2 d x)\sqrt{a^2 x^4 + x^6}$ das Integral haben, wo nämlich die Größe vor dem Wurzelzeichen das Differential von der Wurzelgröße nicht enthält, so bringt man nach dem V. Beyspiele §. 168. nur eine unbekannee Größe, oder x^2 regelmäßig vor das Wurzelzeichen; so wird $(a^2 x d x + 2 x^3 d x)\sqrt{(a^2 x^2 + x^4)}$ daraus. Wenn nun $\sqrt{(a^2 x^2 + x^4)} = (a^2 x^2 + x^4)^{\frac{1}{2}} = v$ gemacht wird: so wird endlich $\frac{1}{3}(a^2 x^2 + x^4)^{\frac{3}{2}}$ das Integral werden. Soll

Soll $(3ax^3dx+4x^4dx).(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}$ integrirt werden, so bringt man eine veränderliche Größe x regelmäßig hinter das Wurzelzeichen; dann wird $(3ax^2dx+4x^3dx).(ax^3+x^4)^{\frac{1}{2}}$. Wovon endlich wieder das Integral $=\frac{2}{3}(ax^3+x^4)^{\frac{3}{2}}$ wird.

Dieß soll nun genug seyn für Anfänger, um davon in der Geometrie Gebrauch zu machen, und sie weiter darinn üben zu können. Das übrige hieher noch Gehörige: als von den logarithmischen Differentialien: von der Exponentialrechnung u. a. wird einst in der höhern Geometrie folgen. Auch sind sowohl die unbestimmten, als höhern Gleichungen wider mein ehemaliges Vorhaben weggelassen worden: weil ich sie etwa meinen Hrn. Auditorn besonders mittheilen werde.

Die Integralrechnung ist nicht von dem Hrn. v. Leibnitz, sondern erst von Joh. Bernoulli dem ältern erfunden worden. Marquis v. Hospital, welcher sie aus dem Manuskript des Bernoulli hatte, wollte sie am ersten bekannt machen. Er unterließ es aber, weil er erfuhr, daß Hr. v. Leibnitz selbst Willens wäre, eine *scientiam infiniti* herauszugeben, in der Absicht, die Welt eines weit herrlicheren Werkes nicht zu berauben. Doch Hrn. v. Leibnitz hinderten die Geschäfte: und es gab endlich 1700 Carre eine *Methode pour la Mesure des surfaces la dimension des solides, leurs centres de Pesanteur, de Percussion et d'oscillation par application du Calcul integral* heraus, wo er das Leichteste

der

der Integralrechnung abhandelte, und mit allerhand Beyspielen erläuterte. Georg Cheinaeus ein schottländischer Arzt und Mathematiker gieng dann weiter, indem er *Methodum inuersam fluxionum* schrieb, und selben auch auf die Reihen anwandte. Der jetzige Zustand der ganzen Differential= und Iniegralrechnung, und die großen Männer, welche sie zu der bewunderungswürdigen Vollkommenheit gebracht haben, sind schon (§. 165. Anm.) angezeigt worden. Mann kann Klemms mathem. Lehrb. §. 767.-877. Kästners Anal. unendl. Gr. §. 44. u. 45. vollst. mathem. Lexikon bey den Worten **Differential= und Integralrechnung nachschlagen.**

Druck=

Druckfehler,

die den Sinn stören können.

§. u. Seite.	Fehler.	Verbesserung.
17. a.	$-a+-\frac{x}{2}-bx.$	$-a+\frac{x}{2}-bx$
20. c.	$\frac{1}{a+3b}$	$\frac{b}{a+3b^2}$
30. b.	der Waage	des Skorpions
——	nach 4 T.	nach 3 T.
31. a.	4 Ellen	$2\frac{2}{3}$ Ellen
33.	II. $20\times4+30\times6$	$20\times6+30\times4$
— b.	Vom y, $\frac{2}{3}$; vom x $\frac{1}{3}$	Vom x, $\frac{2}{3}$; vom y, $\frac{1}{3}$.
Anmerk.	$15-9=4$	$13-9=4$
45. 1te Aufg. 1.)	$=4x-\frac{4000}{3}.$	$=\frac{4x-4000}{3}$
weiter unten	$\frac{64x-1480000}{27}.$	$\frac{64x-148000}{27}$
65. S. 74.	$17^\circ\times46'''.$	$17^\circ\times46'$
79. S. 88.	$a^2=8.$	$a^3=8.$
92. S. 103.	$\frac{5a^8}{128a^7}.$	$\frac{5x^8}{128a^7}$
111	3 Ellen 6 Thaler.	3 Ellen 5 Thaler
140 S. 173.	926, 29	926, 91
167. IV.	$\frac{-axdx}{x^2-dx}=-\frac{a}{x}$	$\frac{-axdx}{-x^2dx}=\frac{a}{x}$

168. S. 210. IV. Soll $(2adx-4xdx)(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ stehen.

—— S. 211. IV. Soll in $\frac{2}{7}\sqrt{}(a+x)^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{5}\sqrt{}(a+x)^{\frac{5}{2}}$ überall $\sqrt{}$ weggelassen werden.

§. u. Seite.	Fehler.	Verbesserung.
159.	$y d^2 x + (d y)^2$	$y d^2 y + (d y)^2$
——	$y d x d^2 x y$	$y d x d^2 y$
160.	1×8 und 2×4	1×7 und 2×6

NB. München 1780.
Zu finden bey Johann Georg Ruprecht, Burger und Buchbinder nächst der St. Peters Pfarrkirche.

Fig. I

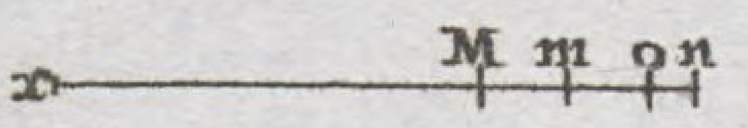


Fig. II

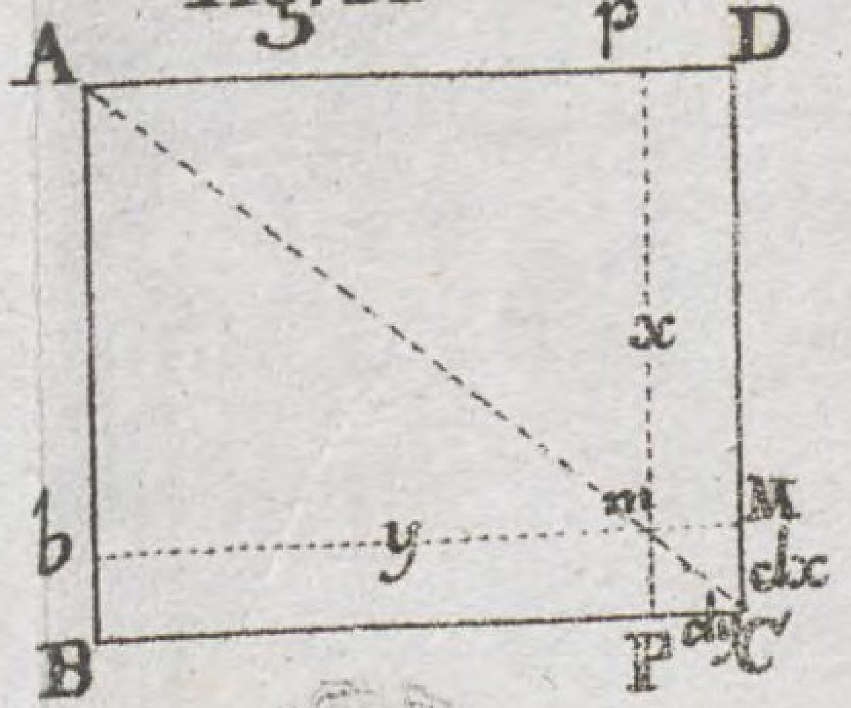


Fig. III

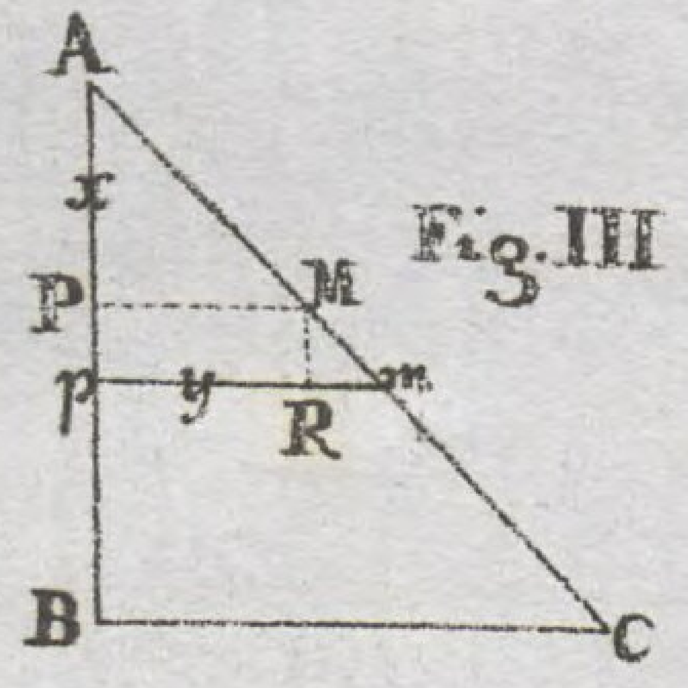


Fig. IV

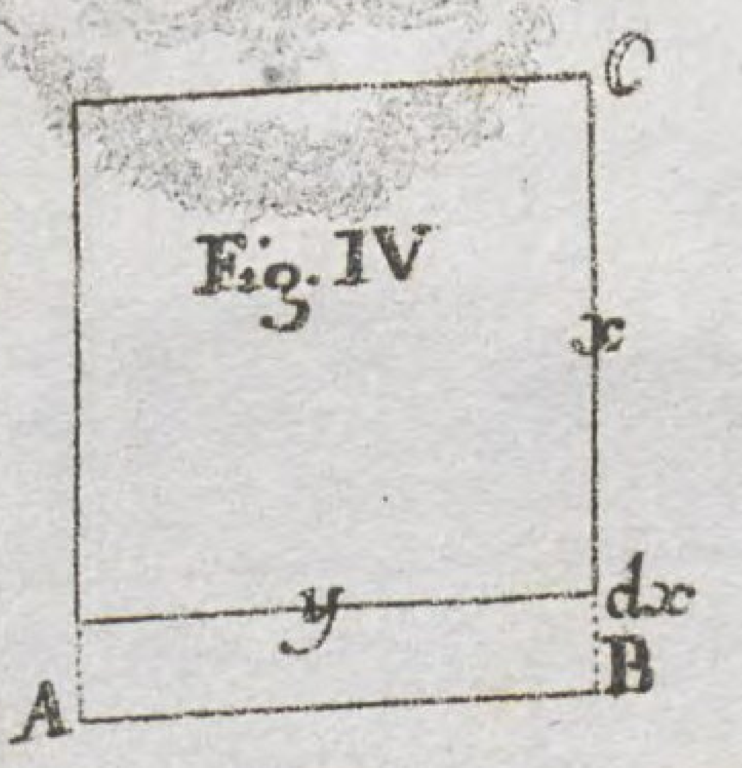


Fig. V

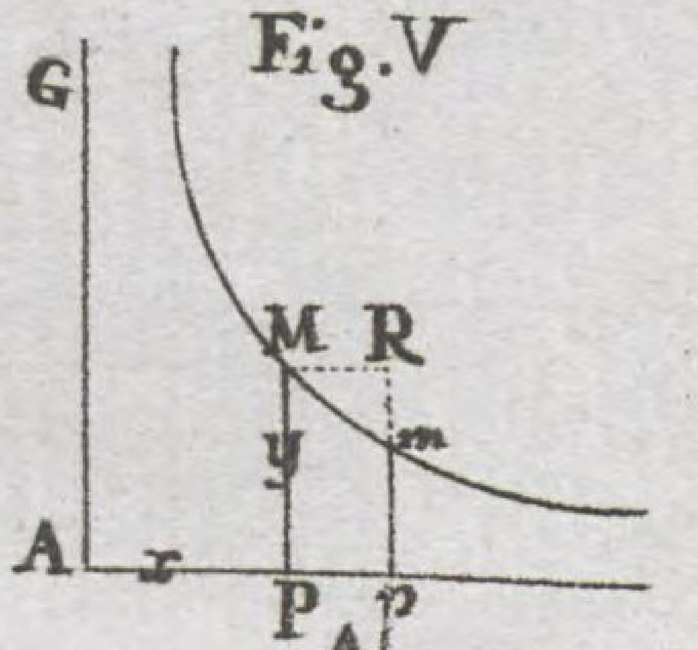
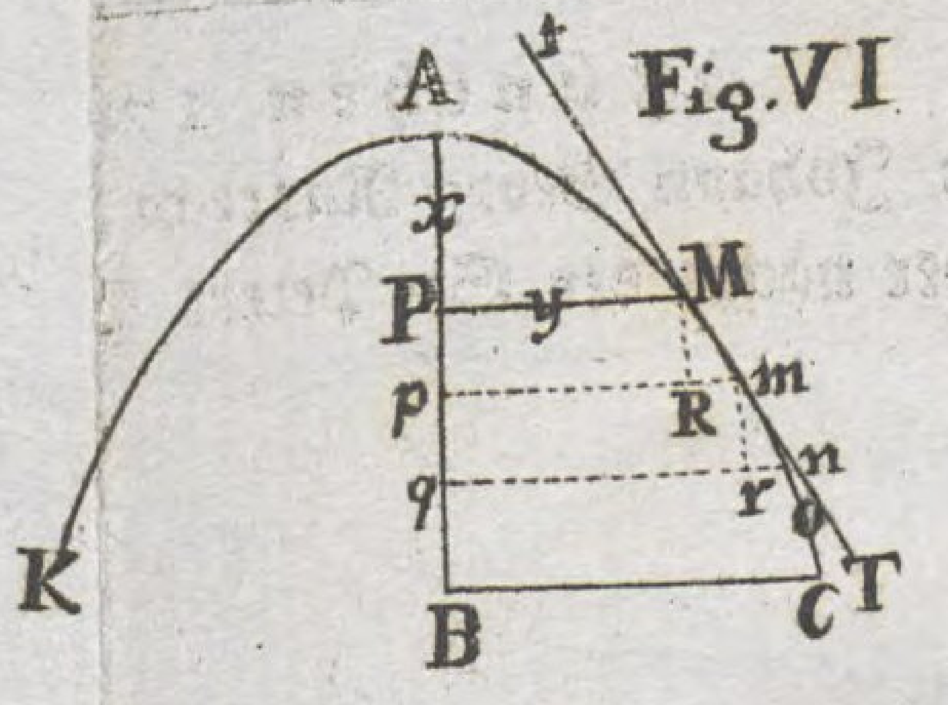


Fig. VI



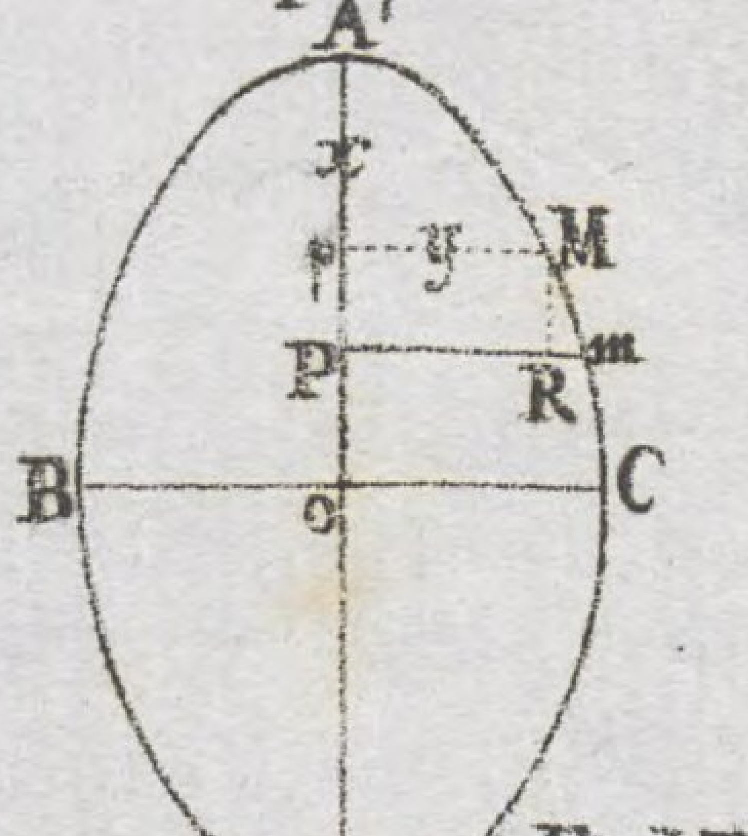
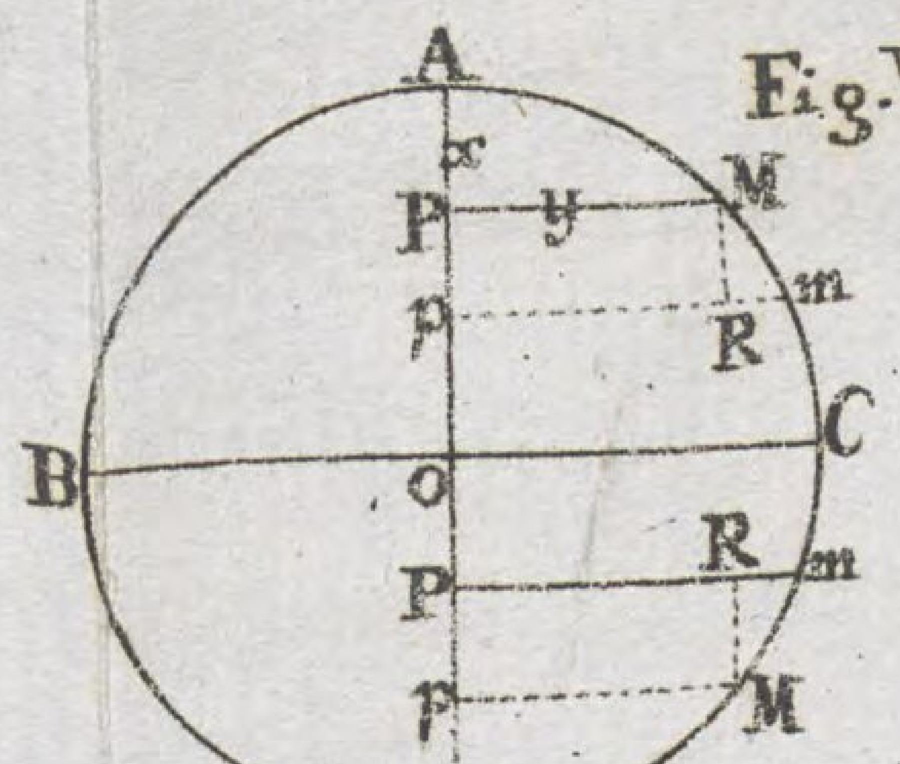


Fig. VII

Fig. VIII



Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Danzer, Joseph Melchior,

Joseph Tanzers der Weltweisheit Doktors ... mathematisches Lehrbuch zum Gebrauche der churfürstlichen Lyceen

Bd.: 1

München (1780)

Math.u. 193-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594302-2
VD18 80411320-001